Ing. GIROLAMO IPPOLITO

Libero Docente di Costruzioni Idrauliche e Ponti nella R. Scuola Superiore Politecnica di Napoli

LIBRARY UNIVERSITY OF ILLINOIS URBANA

SUL CALCOLO

DELLE

DIGHE AD ARCO

CONDIZIONI DI MASSIMA ECONOMIA
EFFETTI DELLE VARIAZIONI TERMICHE

ULRICO HOEPLI

EDITORE LIBRAIO DELLA REAL CASA
MILANO

1923

PROPRIETÀ LETTERARIA

NAPOLI - Unione Tipografica Combattenti - Rampe S. Marcellino, 19 a 22

ENGINEERING LIBRARY
627.8
Ip5s
LIBRARY
UNIVERSITY OF ILLINOIS
URBANA

INDICE

Premessa . . . . . Pag. 1

Notazioni . . . . . „ 10

CAP. I. — *Statica delle dighe ad arco* . . . . . „ 11
Arco di spessore costante, soggetto a carico idrostatico uniforme. Limiti in cui si verificano sforzi di trazione. Sforzi dovuti a variazioni di temperatura. Arco di spessore variabile, soggetto a carico idrostatico uniforme. Arco di spessore costante, soggetto a carico idrostatico variabile. Arco di spessore costante, soggetto al peso proprio. Arco con spessore e carico variabili. Solidarietà degli anelli della volta.

CAP. II. — *Condizioni di massima economia nelle dighe ad arco.* „ 49
Formule approssimate per il calcolo di un anello. Influenza della deformabilità dell' anello. Profilo teorico delle dighe a corda costante. Spessore in sommità. Calcolo di un anello di volta di minimo volume. Diga a volta di volume totale minimo. Volumi elementari in dighe a corda costante. Massima economia in una diga a profilo simmetrico e corda costante. Massima economia in una diga con paramento a monte verticale e corda costante. Parallelo fra il profilo simmetrico ed il profilo con paramento a monte verticale. Calcolo delle dighe a corda variabile. Condizioni di massima economia per una diga a corda variabile.

CAP. III. — *Influenza delle variazioni di temperatura* . . . „ 97
Calcolo diretto delle dighe a volta, tenendo conto delle variazioni di temperatura. Fattori che limitano gli sforzi dovuti a variazioni termiche. Calcolo degli sforzi interni prodotti da una distribuzione qualunque delle temperature. Variazione della temperatura esterna alla diga. Distribuzione delle temperature a serbatoio pieno. Distribuzione delle temperature a serbatoio vuoto. Fenomeni termici che accompagnano la presa del cemento. Contrazione della malta di cemento durante la presa. Risultati di recenti misure dirette delle temperature.

Conclusioni . . . . . „ 153

164p31 Krogh
civil engin 3 p31 Haupt
756664

INDICE DELLE TABELLE

TAB. I. — Valori dei coefficienti C_1, C_2, C_3, C_4, C_5 . . Pag. 19
TAB. II. — Limiti nei quali si hanno sforzi di trazione all'imposta „ 22
TAB. III. — Valori dei coefficienti C, da C_6 a C_{14} . . . „ 39
TAB. IV. — Calcolo degli anelli di volta di ampiezza da 180° a 120° „ 53
TAB. V. — Valori di a nella form. (5) Cap. II. . . . . „ 55
TAB. VI. — Calcolo dell'anello di minimo volume . . . „ 66
TAB. VII. — Calcolo degli anelli di volta di ampiezza da 110° a 10° „ 83
TAB. VIII. — Calcolo degli elementi di diga a corda variabile . „ 85
TAB. IX. — Valori di $\frac{\mu'_i}{\eta}$. . . . . „ 104
TAB. X. — Valori di a, b, c, nella form. (7), Cap. III. . . „ 105
TAB. XI. — Valori di ρ, k, c, per diverse materie. . . . „ 118
TAB. XII. — Valori di $\frac{t}{T_e}$ per frazioni di periodo. . . . „ 121
TAB. XIII. — Valori di $\alpha = \frac{T_m}{T_e}$ . . . . . „ 137

ERRATA CORRIGE

pag. 110 Nota 1) riga 2ª	in un punto	nel baricentro
pag. 118 Tab. XI riga 3ª	Gnliss	Gneiss

L' indirizzo più caratteristico che negli ultimi anni si delinea, nei riguardi del problema tecnico dello sbarramento di vallate per creazione di laghi artificiali, è senza dubbio dato dal crescente favore che presso gli studiosi ed i costruttori incontrano le dighe a volta, - sieno esse ad arco unico o ad archi multipli, - rispetto alle dighe con profilo a gravità.

Noi assistiamo ad una continua ascesa di questo genere di costruzioni, che, giunte quasi per ultime nel campo della pratica, si vanno ogni giorno più moltiplicando, e, limitate in un primo periodo allo sbarramento di gole particolarmente strette, ora, con l' adozione degli archi multipli impostati contro robusti contrafforti, invadono anche il campo che pareva riservato esclusivamente ai profili a gravità.

Costruzioni timide in principio, se bene audacissime per il momento in cui furono eseguite, sono andate rapidamente sviluppandosi e sono state con costante successo impiegate in sbarramenti sempre più importanti, sia per la luce della vallata, sia per l'altezza della ritenuta.

Opere che sembrarono qualche anno fa ardite anche nel paese degli ardimenti, voglio dire in America [1]), ora sono

---

[1]) É notevole la diga di Ithaca nello stato di New-York, che progettata per una altezza di circa 30 m. come diga a volta in una gola larga circa 27 m., fu nel 1903 costruita per soli 10 m. di altezza per i dubbi che destò fra i tecnici un'opera così ardita (V. Trans. Am. S. C. E. Vol. 53 p. 183).

senza preoccupazioni adottate nelle condizioni locali più diverse; ed è sintomatico il fatto, alcune volte verificatosi, (come ad es. recentemente per la diga del Tirso in Sardedegna) [1]) di dighe progettate prima con profilo a gravità, e poi sostituite al momento dell'esecuzione con dighe a volta.

Dalla diga di Meer Allum in India, costruita intorno al 1800, ad archi multipli e contrafforti, — prima opera del genere e vera geniale audacia per l'epoca ormai remota della sua costruzione —; dalla diga Zola in Francia, eretta nel 1842, in cui l'affidamento alla resistenza come volta è ancora parziale; dalla diga di Parramatta, costruita nel 1858 nella Nuova Galles del Sud (Australia), esempio primo di tutta una serie di dighe simili, dove per la prima volta agli archi è affidata la completa resistenza; dalla sottilissima diga di Bear Valley impiantata nel 1884 in California, — tanto ardita che fu poi alcuni anni fa (1910-1911) sostituita con una ad archi multipli, — giù giù fino alle più recenti dighe di Shoshone, di Salmon Creek, di Hume Lake, di Aziscohos, di Mountain Dell, di Lake Hodges presso S. Dieguito, della Sélune, del Tirso, ecc., è tutto un crescendo di opere sempre più frequenti, sempre più coraggiose, sempre più importanti e meglio studiate.

Il costante progredire in questi tipi di strutture, il perfezionamento rapidamente conseguito nello studio teorico di esse e nelle loro disposizioni costruttive, ed il favore che sempre più incontrano, mostrano che, non capriccio di moda o momentaneo spirito di novità, ma ben solide ragioni di sicurezza e di economia guidano i tecnici nel seguire le nuove vie, abbandonando quelle battute per tanto tempo. Se può forse essere eccessivo il giudizio di alcuni tecnici, che le dighe a volta siano destinate a soppiantare completamente quelle a gravità, [2]) è certo però che esse presentano vantaggi non indifferenti, e che superate, con la più

---

[1]) Vedi L. Kambo — Annali del Cons. Sup. delle Acque — Anno 1921.

[2]) Vedi ad. es. il giudizio dell'Ing. Iorgensen (Papers Amer. Soc. of Civil. Eng., 1917), del Prof. Luiggi (Annali di Ingegneria e Architettura 1917 e 1918), dell'Ing. Kambo loc. cit., ecc.

larga sanzione della pratica, le diffidenze ed esitazioni che ancora sussistono [1]) — giustificatissime del resto per quella prudenza che non è mai eccessiva in opere di tanta delicatezza — è da aspettarsi un periodo di più largo impiego e di sempre maggiore sviluppo delle dighe ad arco e specialmente ad archi multipli.

Se esaminiamo, infatti, l'attuale stato delle ricerche sulla stabilità delle dighe a gravità, saremo costretti a convenire che non lievi e facili problemi restano ancora sul tappeto e non sembrano avviati ad una rapida soluzione. Al luminoso periodo durante il quale, appoggiati alla nascente scienza della statica delle costruzioni, si sostituirono ai vecchi profili mastodontici ed irragionevoli delle dighe algerine e spagnuole, quelli tanto più economici e più razionalmente studiati dal Sazilly, dal Delocre, dal Rankine, dall'Harlacher dal Castigliano, dal Krantz, dal Crugnola, seguì, in conseguenza di qualche disastro, ed al seguito del primo grido di allarme gettato dal Lévy, tutto un periodo di revisione dei concetti fandamentali su cui debba impostarsi la costruzione delle dighe.

Elementi in principio trascurati, — come l'effetto della sottopressione delle acque, gli sforzi dovuti alle variazioni di temperatura, le rilevanti spinte dei campi di ghiaccio, — vennero messi sempre più in chiara luce attraverso tutta una serie di inconvenienti e qualche volta di disastri, ed assunsero man mano tutta la loro importanza.

Nè la critica risparmiò la base stessa della teoria su cui tutto il nuovo edifizio era fondato, dimostrando la inattendibilità, per grosse strutture murarie, della ipotesi della conservazione delle sezioni piane, ipotesi che di quella teoria è la pietra angolare.

E poichè quasi tutti questi nuovi problemi si sono palesati finora insolubili con l'aiuto della pura teoria, si è

---

[1]) Le recenti norme ministeriali, approvate con D. M. 2 aprile 1921, suggerite da una commissione formata dalle maggiori personalità tecniche, non sono esenti da qualche preoccupazione, che forse il tempo dimostrerà infondata, specie per quanto riguarda il piano di fondazione nelle dighe ad archi multipli.

iniziato parallelamente un periodo sperimentale che dura tuttora ed è ben lontano dal dirsi concluso.

Pochi ancora, infatti, sono i risultati finora sicuramente acquisiti, e la conquista di essi è necessariamente lenta, causa le difficoltà che si incontrano nel rilievo di dati su costruzioni esistenti, e causa la incertezza ed il dispendio inerenti alle prove di laboratorio.

È interessante pertanto esaminare rapidamente lo stato a cui è giunto attualmente lo studio delle dighe a gravità.

L'effetto della sottopressione, sia dovuta a infiltrazione attraverso la massa della diga o delle fondazioni non perfettamente impermeabili, sia dovuta all'entrata dell'acqua in eventuali fenditure createsi nella compagine muraria, è forse la più grave di tutte le incognite che si presentano nello studio delle dighe a gravità.

Per quanto si sia discusso in merito [1]), per quante ricerche sperimentali siano state eseguite [2]), bisogna dire che la soluzione ha ben poco progredito, se ancora oggi sono tanto discordi le opinioni in proposito.

Per alcuni, infatti, la pressione dell'acqua si dovrebbe considerare agente su tutta l'ampiezza di una sezione, con valore costante ed eguale alla pressione idrostatica; per altri con legge decrescente linearmente dal valore della pressione idrostatica a monte fino ad esser nulla a valle; per altri ancora si dovrebbe assumere un valore proporzionalmente ridotto della pressione idrostatica secondo un coefficiente variabile da caso a caso [3]). Vi sono ingegneri che hanno grande fiducia nei drenaggi nell'interno della diga [4]), mentre

---

[1]) Notevole per la sua ampiezza e per i dati apportati la discussione avvenuta fra gli ingegneri Americani a seguito dello studio di C. L. Harrison (Trans. Am. Soc. C. E. Vol. 75 pag. 142).

[2]) Vedi: P. Breuillé — Ann. des Ponts et Chaussées 1899.
Bollettino del Laboratorio di Gross-Lichterfelde 1912. R. Schaefer — Zeitschrift für Bauwesen 1913.
Experiments on Uplift — Papers Am. Soc. C. E. 1915.

[3]) A questo concetto, che contempera le ipotesi più eccessive nei due sensi, si è attenuta la Commissione che ha studiato le recenti norme Ministeriali.

[4]) Come ad esempio sono stati effettuati nella diga della Marklissa

altri ritengono che il loro effetto non può essere che molto limitato.

Ed è da considerare che l'adozione dell'uno o dell'altro di tali concetti non esercita una lieve influenza sul costo totale della costruzione, che invece può variare in conseguenza in limiti notevolissimi [1]).

L'effetto delle variazioni di temperatura nella massa muraria assume anche una grandissima importanza sia per gli sforzi prodotti dalle dilatazioni e contrazioni termiche, sia per le fenditure che possono risultarne.

Sotto questo aspetto il problema si riconnette con quello della sottopressione dell'acqua, la quale trova una agevole via di ingresso attraverso le lesioni prodotte dalle più basse temperature.

Anche su questo fenomeno, e solo recentemente, sono state eseguite delle osservazioni interessanti, non solo per quanto riguarda la distribuzione delle temperature nell'interno della diga, ma anche nei rispetti delle fenditure prodotte da contrazione termica [2]). Ancora molto cammino resta da fare su questa strada, per quanto, come dirò a suo tempo, mi sembra che alcuni risultati importanti possono già acquisirsi, e servire di guida alle ricerche future.

Gli esperimenti anzidetti, nonchè altri consimili eseguiti su ponti di cemento armato [3]), hanno messo in luce, in modo prima insospettato, la grande influenza dovuta alle manifestazioni termiche che si verificano durante la presa del cemento.

Il fatto è rilevante anche come ammaestramento dell'importanza che assumono le ricerche e misure dirette nello studio di un fenomeno, poichè esse sole possono rivelare aspetti nuovi della quistione, e mettere nella vera luce e nel giusto rapporto i diversi fattori da studiare.

---

sul Queis, in Prussia; nella diga Olive Bridge, in America; nella diga Cataract in Australia, ecc.

[1]) Vedi W. I. Douglas (Trans. Am. Soc. C. E. Vol. 75 pag. 207).

[2]) Vedi Papers Am. Soc. C. E. aprile ed agosto 1908.

[3]) Vedi Nichols e Mc Cullough (Bulletin of the Iowa State College of Agriculture and Mechanic N. 30).

L'adozione dei giunti di dilatazione, recentemente impiegati su larga scala nelle dighe con profilo a gravità, tende a ridurre l'effetto delle variazioni termiche, tuttavia la migliore disposizione e l'andamento da dare a questi giunti costituiscono ancora un problema non ben risoluto.

Per quanto riguarda il metodo fondamentale per il calcolo degli sforzi interni in una diga a gravità, non si è finora raggiunta una sicurezza maggiore che nei problemi precedenti.

La teoria matematica della elasticità non permette una soluzione rigorosa che nel solo caso della diga a sezione triangolare, per la quale la conservazione delle sezioni piane si deduce in modo sicuro. Ma anche queste conclusioni non si possono prendere che nella ipotesi della perfetta indeformabilità della sezione di incastro alla base.

Per quanto riguarda le dighe di profili pratici, malgrado gli studi recenti del Lévy, del Mohr, del Platzmann, del Guidi, — per non citare che i maggiori, — non può concludersi altro [1]) se non che la ipotesi della conservazione delle sezioni piane sia da preferirsi ad ogni altra in mancanza di meglio.

Nè hanno potuto finora risolvere il quesito le ricerche sperimentali eseguite con larghezza di mezzi, specialmente in Inghilterra, operando su modelli di dighe di piccole dimensioni e di materiali molto deformabili [2]), per quanto i risultati ottenuti siano di un grande interesse.

Molta discordanza anche si riscontra fra i vari tecnici per quanto riguarda la pressione dovuta alla espansione termica del ghiaccio che, secondo il clima e l'altitudine, si formi sui laghi artificiali.

Questo fenomeno, di cui da non molti anni si è messo in valore l'importanza, genera delle pressioni non ben definite ma certo molto rilevanti.

Non una dunque delle incognite principali che si affac-

---

[1]) Vedi: Guidi — Statica delle dighe.

[2]) Vedi L. W. Atcherley, (Atti dell'Università di Londra, Serie Tecnica II); B. Baker (Minutes of Proceeding of the Instit. of Civ. Eng. Vol. 162 pag. 120); W. C. Unwin (Engineering Vol. 79 pag. 513, 593 e 825).

ciano nello studio delle dighe a gravità può dirsi giunta ad una soluzione definitiva, ed il calcolo di questo genere di strutture, malgrado tanto sforzo di studio e di ricerche, rimane, se pure in limiti più ristretti di un secolo fa, ancora affidato ad ipotesi fondamentalmente arbitrarie.

Nè un miglioramento della situazione si può sperare da una ulteriore elaborazione teorica, perchè dal punto morto in cui la quistione è giunta non potrà esser tratta fuori che dai risultati di omogenee e coordinate ricerche sperimentali, da istituirsi specialmente su opere esistenti o in costruzione [1]).

Per contro, nelle dighe ad arco, l' applicazione delle formule della scienza delle costruzioni appare più sicura e più soddisfacente. La struttura può meglio essere proporzionata in ogni sua parte agli sforzi agenti e quindi il materiale molto meglio utilizzato; e, se è vero che le incognite inerenti alle dighe a gravità si ripresentano per il calcolo dei contrafforti delle dighe ad archi multipli, esse sono tuttavia diminuite di numero, non essendo da temere le più pericolose, e cioè la sottopressione dell' acqua e gli effetti dovuti ai cambiamenti di temperatura.

Se a questi vantaggi incontestabili aggiungiamo quelli certamente notevoli di una più grande rapidità di costruzione e di una maggiore economia dell'opera, nonchè di un più facile adattamento ai più svariati terreni di fondazione, (potendo i diversi contrafforti essere separatamente fondati, anche con sistemi diversi uno dall'altro), non sembrerà strano il crescente favore che va assumendo un tal genere di opere.

Tuttavia la teoria delle dighe a volta, se pure già fondamentalmente costituita, merita ancora una ulteriore elaborazione.

Dall'esame infatti delle più recenti teorie sulla statica delle dighe a volta, mentre emergono la perfezione e la sicurezza raggiunta nel calcolo, si rende però manifesta la

---

[1]) Notevole in proposito il metodo di misura ideato dall' Ing. L. Kambo, (V. Annali del Cons. Sup. delle Acque - Vol. III 1921), basato sulla relazione che lega la resistenza elettrica di un conduttore e la pressione cui è sottoposto.

incertezza e la discordanza di opinioni, che ancora sussistono sui problemi che riguardano la economia della costruzione.

Mi è parso che questa quistione meriti uno studio particolare, sia per fissare una buona volta il retto criterio da seguirsi, sia perchè, essendo la condizione della spesa quella che non di rado influisce a far preferire una diga a volta ad una a gravità, è di grande interesse poter scegliere fra le varie soluzioni, che diano lo stesso affidamento di sicurezza, quella che risulti meno dispendiosa.

Passate quindi in rassegna (Cap. I) le recenti teorie sulla statica delle dighe a volta, ho trattato nel Cap. II. il problema della massima economia della struttura.

Nel Cap. III. ho poi tentato un avviamento più razionale del problema riflettente la ricerca degli sforzi dovuti a cambiamenti di temperatura, studiando la distribuzione delle temperature nell'interno di una diga, e ricercando gli sforzi che da una tale distribuzione sono prodotti.

Nè l' uno nè l' altro argomento possono esaurirsi nel breve giro di questa memoria, tuttavia le conclusioni a cui sono giunto mi sembrano di un certo interesse.

Ulteriori studi mi propongo di svolgere quanto prima, sia per determinare le condizioni di massima economia in dighe ad archi multipli, tenendo conto della inclinazione delle generatrici e del volume dei contrafforti; sia per sviluppare la ricerca degli sforzi dovuti alla temperatura in alcuni altri casi interessanti e per meglio valutare gli importantissimi fenomeni termici e di contrazione che accompagnano la presa del cemento.

In questo senso ho già indirizzate delle ricerche sperimentali e sviluppati dei calcoli, ma la ristrettezza del tempo non mi consente di inserire qui i risultati che spero dedurne.

Ho adottato nello studio di alcuni problemi un metodo approssimativo, che consiste nel sostituire all' analisi di funzioni troppo complesse e poco maneggevoli, quella di funzioni approssimate completamente diverse nella loro espressione analitica, ma che si discostino nei valori numerici il meno possibile dalle vere.

La determinazione di esse si esegue costruendo graficamente le funzioni effettive, e dal loro andamento, limitato al campo che interessa la pratica, deducendo la forma più opportuna da dare alla funzione approssimata.

La teoria dei minimi quadrati fornisce poi un meccanismo omogeneo per la più opportuna determinazione delle costanti che entrano nella espressione della funzione scelta.

Mi sembra che nell'ambito delle costruzioni questo procedimento sia perfettamente legittimo, in quanto possiamo sempre immaginare di ignorare la legge analitica e di conoscere sperimentalmente per punti l' andamento del fenomeno.

In questo caso, infatti, è normalmente ammesso, nel campo delle scienze, la interpretazione di un fenomeno con funzioni analitiche approssimate.

D'altra parte non mi sembra che il metodo da me adottato sia sostanzialmente più ardito di quanto si fa comunemente col trascurare alcuni fattori secondari di una quistione, o alcuni termini delle espressioni analitiche, il cui valore sia esiguo, o con lo sviluppare in serie una funzione contentandosi di rappresentarla con i soli primi termini dello sviluppo.

Il vantaggio del metodo anzidetto sta principalmente nella maggiore libertà che si ha nella scelta della funzione rappresentativa, e perciò mi sembra che esso, se presenta l'inconveniente di una non lieve laboriosità di calcoli, può essere però fecondo di numerose applicazioni in tutti quei problemi costruttivi, — e sono molti, — in cui la complessità delle formule dissuade da una esauriente analisi di esse.

Notazioni

l = corda
r = raggio
f = freccia
s = sviluppo
$2\varphi_0$ = angolo al centro o ampiezza
} dell' arco baricentrico di un anello di diga ad arco

r_e = raggio di estradosso
h = spessore
V = volume
$\eta = \frac{r}{h}$ = rapporto fra il raggio medio e lo spessore
} di un anello di diga ad arco

L = corda
R = raggio medio
R_e = raggio di estradosso
A = altezza
W = volume
} per tutta la diga

p_e = pressione idrostatica unitaria all'estradosso
$p = p_e \frac{r_e}{r}$ = » » » riferita all' arco baricentrico
t = temperatura
T = valor massimo della temperatura
τ = tempo
Θ = periodo di tempo
σ, ς = sforzi unitari interni (positivi se di compressione)

k = coefficienti di sicurezza alla compressione
E = modulo di elasticità
ρ = densità
γ = peso specifico
α = coefficiente di dilatazione lineare
c = calore specifico
K = coefficiente di conduttività termica interna
} del materiale costituente la diga

CAP. I.

Statica delle dighe ad arco.

1. — Le dighe ad arco o a volta, oggi in uso, sono essenzialmente di due tipi: dighe ad arco unico impostato direttamente contro i fianchi rocciosi della valle da sbarrare, e dighe ad archi multipli, impostati contro pilastri di struttura muraria.

Le dighe ad arco unico non sono adottabili se non in gole montane abbastanza strette da poter fare affidamento sulla resistenza della costruzione come arco.

Non è possibile stabilire fino a che valore della corda si possa considerare la diga come arco e da quel valore in sopra si debba ritenerla come semplicemente a gravità. Ciascuna diga a pianta arcuata, — come avverte il Guidi nella sua « *Statica delle Dighe* », che avrò spesso occasione di citare — partecipa così dell'uno come dell'altro sistema statico ed il trascurarne uno va generalmente in favore della stabilità della costruzione.

Nelle dighe arcuate a raggio molto grande si suole in Europa trascurare completamente la resistenza come volta; in America, invece, parecchi ingegneri ritengono che si possa dividere la pressione idrostatica in due parti, di cui la più piccola — pari al 5 ÷ 8 % della totale — agisca come carico gravante l'arco.

Questo criterio è stato proposto per evitare che una diga arcuata venga a costare di più di una diga a pianta rettilinea; basta perciò diminuire il carico in proporzione

della maggior lunghezza che assume la diga, in conseguenza del suo andamento planimetrico curvo.

Tuttavia occorre considerare che nel preferire la diga arcuata anche in vallate molto larghe si hanno di mira scopi ben diversi, e principalmente quello di diminuire l'effetto delle variazioni di temperatura.

Un aumento di spesa quindi è compensato dalla maggior sicurezza contro sforzi, che in date circostanze possono riuscire particolarmente pericolosi.

In dighe a raggio piccolo la resistenza come arco è notevolmente più importante e quasi sempre viene considerata come sola efficace ad opporsi alla spinta dell'acqua. All'uopo si suppone la volta scomposta in anelli elementari che si immaginano sovrapposti gli uni agli altri, ma senza solidarietà fra di loro.

Il Guidi ha mostrato che un tal modo di procedere riesce a favore della stabilità, in quanto la solidarietà degli anelli, a causa della indeformabilità di quello inferiore, tende a centralizzare le curve delle pressioni.

Non mancano teorie intese a tener conto simultaneamente della resistenza come arco e come muro di sostegno, [1]) e di esse faremo cenno in seguito. Sono però procedimenti laboriosi e lunghi, che non offrono nemmeno il compenso di una grande attendibilità [2]).

Nelle dighe ad archi multipli, allo scopo di utilizzare il peso dell'acqua, si sogliono disporre le volte con le generatrici inclinate alla orizzontale di un angolo di 45° a 60°.

In tal caso la suddivisione in elementi conviene sia fatta con piani normali alle generatrici. Si ottengono allora degli archi per i quali la pressione dell'acqua non è costante dal vertice all'imposta, e che sono inoltre sollecitati, se bene in parte, anche dal peso proprio. Il calcolo diventa molto più complicato, specie per gli anelli di sommità dove la disuniformità della pressione diventa più grande.

---

[1]) Vedi A. Ritter — Die Berechnung von bogenförmigen Staumauern (Karlsruhe 1913), nonché R. Shirrefs, C. L. Harrison ed S. P. Woodard in Transaction Am. Soc. of Civil Engineer Vol. 53 p. 155.

[2]) Guidi - Op. Cit.

Per diminuirne gli effetti si suole costruire la parte superiore della diga con generatrici verticali.

Circa il materiale con cui si costruiscono in genere le dighe ad arco è da osservare che di norma dovrebbe essere sempre calcestruzzo di cemento. Si possono talora annegare nella massa dei blocchi di pietra di dimensioni non eccessive, ma sempre in modo che sia agevole disporre in opportuni siti delle armature metalliche.

È infatti difficile evitare completamente nelle dighe ad arco ogni sforzo di trazione ed occorre quindi andar molto cauti nel progettare opere simili in muratura ordinaria o in calcestruzzo senza armature.

Lo studio della statica delle dighe a volta, implica dunque l'esame dell'arco elementare, nei vari casi che possono presentarsi nella pratica, esame che forma oggetto dei paragrafi seguenti.

2. — Arco di spessore costante, soggetto a carico idrostatico uniforme. — Il calcolo di un arco di spessore costante soggetto alla sola pressione idrostatica, uniforme su tutto l'estradosso, fu eseguito fino a non molti anni fa con la nota formula semplicissima:

$$h = \frac{rp}{k} \tag{1}$$

dove h è lo spessore dell'anello, che si suppone di altezza eguale all'unità, r è il raggio dell'arco baricentrico, p è la pressione idrostatica, valutata per unità di lunghezza dell'arco baricentrico, e k è il coefficiente di sicurezza alla compressione della muratura di cui la volta è costituita [1]).

Poichè è nota la pressione unitaria dell'acqua sull'estradosso, che indicheremo con p_e, la pressione p riferita all'arco medio sarà evidentemente:

$$p = p_e \frac{r + \frac{1}{2}h}{r}$$

---

[1]) Per le notazioni vedi a pag. 10.

e quindi, sostituendo in (1), si ricava:

$$h = \frac{rp_e}{k - \frac{1}{2} p_e}$$

Se poi fosse assegnato il raggio di estradosso $r_e = r + \frac{1}{2} h$, allora sarà ancora valida la (1) ponendo $p_e r_e$ al posto di pr.

Queste formule nascono dalla ipotesi che l'arco baricentrico, che è curva funicolare per il carico idrostatico uniforme, sia la effettiva curva delle pressioni.

Ma lo sviluppo della teoria della elasticità ha mostrato che la curva delle pressioni si scosta, benchè leggermente, dall'arco medio, per effetto della deformazione elastica della volta, ed ha dato la possibilità del calcolo razionale di essa.

Il metodo più semplice, nel caso in esame, è quello dell'ellisse di elasticità, come fu magistralmente sviluppato da W. Ritter, nelle sue *Anwendungen der Graph. Statik.* Seguendo le orme paterne, l'Ing. H. Ritter, in uno studio sulle dighe a volta — « *Die Berechnung von bogeförmigen Staumauern* » (Karlsruhe 1913), — sviluppa analiticamente il calcolo per un arco di sezione costante, procedendo nel seguente modo.

Se non si considera la deformazione elastica, la risultante per ogni sezione trasversale è notoriamente normale e baricentrica e vale pr. Per effetto della deformazione elastica si genera invece una reazione d'imposta supplementare H_p, che è applicata nel baricentro elastico dell'arco, ed è parallela alla corda di esso.

Detta Ω e W l'area ed il modulo di resistenza della sezione trasversale, ed y la distanza dei punti di nocciolo di ogni sezione dalla linea d'azione della forza H_p, lo sforzo unitario σ, all'estradosso o all'intradosso, sarà per una sezione qualunque:

$$\sigma = \frac{pr}{\Omega} \pm \frac{H_p y}{W} \tag{2}$$

In particolare, il calcolo di H_p risulta agevole, con l'aiuto dei teoremi sull'ellisse di elasticità, nel caso della sezione

rettangolare di altezza uno e spessore h, per la quale:

$$\Omega = h$$
$$W = \frac{h^2}{6}$$

Il Ritter giunge al risultato:

$$H_p = pr \frac{h^2}{r^2 C_1 + h^2 C_2} \tag{3}$$

dove C_1 e C_2 sono quantità che dipendono solamente dalla ampiezza $2\varphi_0$ dell'arco.

Per la sezione di chiave i valori di y sono, per l'intradosso e l'estradosso, dati da:

$$\begin{cases} y_i = r\left(1 - \frac{l}{s}\right) + \frac{h}{6} = r\left(1 - \frac{\operatorname{sen}\varphi_0}{\varphi_0}\right) + \frac{h}{6} \\ y_e = r\left(1 - \frac{l}{s}\right) - \frac{h}{6} = r\left(1 - \frac{\operatorname{sen}\varphi_0}{\varphi_0}\right) - \frac{h}{6} \end{cases} \tag{4}$$

e per la sezione di imposta, da:

$$\begin{cases} y'_i = r\left(\frac{l}{s} - \frac{r-f}{r}\right) - \frac{r-f}{r} \cdot \frac{h}{6} = r C_5 - \frac{h}{6} \cos\varphi_0 \\ y'_e = r\left(\frac{l}{s} - \frac{r-f}{r}\right) + \frac{r-f}{r} \cdot \frac{h}{6} = r C_5 + \frac{h}{6} \cos\varphi_0 \end{cases} \tag{4'}$$

per l'intradosso e l'estradosso (fig. 1), avendo posto la quantità in parentesi eguale a C_5.

Tenendo conto del senso del momento $H_p\, y$, gli sforzi maggiori si hanno all'intradosso all'imposta ed all'estradosso in chiave:

$$\sigma'_i = \frac{pr}{h} + \frac{6 H_p y'_i}{h^2}$$
$$\sigma_e = \frac{pr}{h} + \frac{6 H_p y_e}{h^2}$$

Ma poichè l'asse baricentrico GX, che coincide con l'asse baricentrico dell'arco medio dista dalla chiave sempre meno che dalla imposta, ne segue che è sempre:

$$y_e < y'_i$$

e conseguentemente:

$$\sigma'_i > \sigma_e$$

Lo sforzo massimo si ha quindi all'intradosso all'imposta.

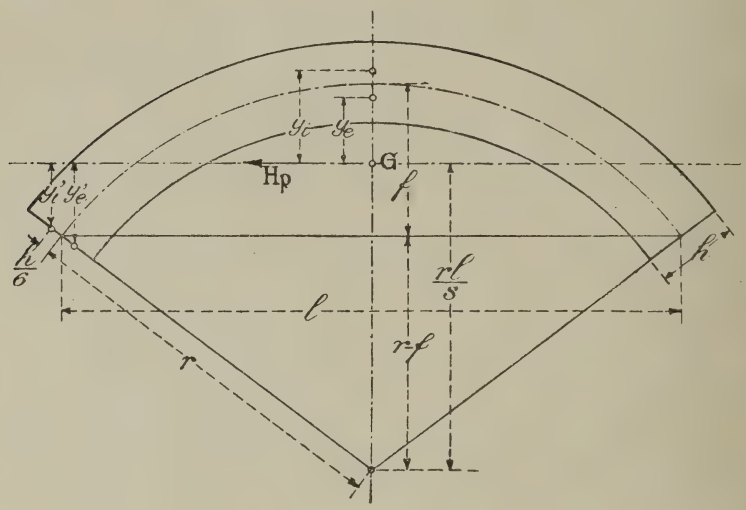


Fig. 1

Eseguendo le sostituzioni di Ω, W, H_p ed y'_e nella (2), e ricordando che

$$p = \frac{p_e\left(r + \frac{1}{2}h\right)}{r}$$

si ottiene facilmente:

$$\sigma'_i = p_e \frac{h^3 C_3 + h^2 r C_4 + h r^2 \cdot 3 C_3 + r^3 C_1}{h^3 C_2 + h r^2 C_1} \tag{5}$$

dove le C sono tutte quantità dipendenti solo dall'ampiezza $2\varphi_0$.

Infine la eccentricità e della curva delle pressioni all'imposta è data da:

$$e = \frac{h^2 r C_5}{h^2 \cdot 2 C_3 + r^2 \cdot C_1} \tag{6}$$

Le espressioni delle costanti C, in funzione degli ele-

menti geometrici dell'arco, o delle funzioni trigonometriche dell'ampiezza $2\varphi_0$, sono:

$$
(7)\quad \begin{cases}
C_1 = 6\left(\dfrac{r-f}{r} + \dfrac{s}{l} - \dfrac{2l}{s}\right) = 6\left(\cos\varphi_0 + \dfrac{\varphi_0}{\operatorname{sen}\varphi_0} - \dfrac{2\operatorname{sen}\varphi_0}{\varphi_0}\right) \\
C_2 = \left(\dfrac{2s}{l} - \dfrac{r-f}{r}\right) = \dfrac{2\varphi_0}{\operatorname{sen}\varphi_0} - \cos\varphi_0 \\
C_3 = \left(\dfrac{s}{l} - \dfrac{r-f}{r}\right) = \dfrac{\varphi_0}{\operatorname{sen}\varphi_0} - \cos\varphi_0 \\
C_4 = \left(\dfrac{2s}{l} + \dfrac{3l}{s} - 5\dfrac{r-f}{r}\right) = \dfrac{2\varphi_0}{\operatorname{sen}\varphi_0} + \dfrac{3\operatorname{sen}\varphi_0}{\varphi_0} - 5\cos\varphi_0 \\
C_5 = \left(\dfrac{l}{s} - \dfrac{r-f}{r}\right) = \dfrac{\operatorname{sen}\varphi_0}{\varphi_0} - \cos\varphi_0
\end{cases}
$$

ed i loro valori sono riportati nella Tab. I a pag. 20, calcolata da H. Ritter, per $2\varphi_0$ variabile di 10^0 in 10^0, fino a 180^0.

Con un procedimento di calcolo non molto dissimile, il Guidi giunge allo stesso risultato, sintetizzato nelle formule semplicissime [1]):

$$
(8)\quad \begin{cases}
\sigma_e = p\left(\dfrac{r}{h} + \mu_e\right) \\
\sigma_i = p\left(\dfrac{r}{h} - \mu_i\right) \\
\sigma'_e = p\left(\dfrac{r}{h} - \mu'_e\right) \\
\sigma'_i = p\left(\dfrac{r}{h} + \mu'_i\right)
\end{cases}
$$

in cui i valori delle μ sono:

$$
(8')\quad \begin{cases}
\mu_e = \dfrac{1}{\vartheta}\left(\dfrac{s-l}{s} - \dfrac{h}{6r}\right) = \dfrac{1}{6\vartheta}\left[6\left(1 - \dfrac{\operatorname{sen}\varphi_0}{\varphi_0}\right) - \dfrac{h}{r}\right] \\
\mu_i = \dfrac{1}{\vartheta}\left(\dfrac{s-l}{s} + \dfrac{h}{6\vartheta}\right) = \dfrac{1}{6\vartheta}\left[6\left(1 - \dfrac{\operatorname{sen}\varphi_0}{\varphi_0}\right) + \dfrac{h}{r}\right] \\
\mu'_e = \dfrac{1}{\vartheta}\left[\dfrac{l}{s} - \dfrac{r-f}{r}\left(1 - \dfrac{h}{6r}\right)\right] = \dfrac{1}{6\vartheta}\left[6\,C_5 + \dfrac{h}{r}\cos\varphi_0\right] \\
\mu'_i = \dfrac{1}{\vartheta}\left[\dfrac{l}{s} - \dfrac{r-f}{r}\left(1 + \dfrac{h}{6r}\right)\right] = \dfrac{1}{6\vartheta}\left[6\,C_5 - \dfrac{h}{r}\cos\varphi_0\right]
\end{cases}
$$

---

[1]) Le formule sono state trascritte col segno cambiato, perchè considero positivi gli sforzi di compressione.

essendo ancora:

$$(8'') \qquad \vartheta = \frac{s}{l} + \frac{r-f}{r} - \frac{2l}{s} + \frac{h^2}{6r^2}\left(2\frac{s}{l} - \frac{r-f}{r}\right)$$

Che il risultato sia identico a quello dato dal Ritter, si può vedere facilmente. Dalla (8″) si ha:

$$6\vartheta = 6\left(\frac{r-f}{r} + \frac{s}{l} - \frac{2l}{s}\right) + \frac{h^2}{r^2}\left(\frac{2s}{l} - \frac{r-f}{r}\right)$$

ossia per le (7):

$$(8''') \qquad 6\vartheta = C_1 + \frac{h^2}{r^2} C_2$$

Sostituendo questo valore in (3) si ottiene:

$$H_p = \frac{p r h^2}{r^2\left(C_1 + \frac{h^2}{r^2} C_2\right)} = pr \frac{h^2}{6\vartheta r^2}$$

che è il valore trovato dal Guidi per la spinta suppletiva H_p.

Nella Tab. I. si sono riportati anche i valori $\cos\varphi_0$ e $1 - \frac{\operatorname{sen}\varphi_0}{\varphi_0}$, in modo da poter calcolare facilmente le μ e le y per qualunque valore del rapporto $\frac{r}{h}$.

Il Mörsch [1]) aveva già trattata precedentemente la stessa quistione, ricorrendo ai teoremi delle derivate del lavoro di deformazione.

Limitandosi alla sola deformazione dovuta allo sforzo normale ed al momento flettente, ed esprimendo che lo spostamento nel senso della corda e la rotazione della sezione di chiave, supposta fissa la sezione di imposta, debbono essere nulli, giunge, con facili integrazioni, a determinare la spinta ed il momento in chiave.

I risultati sono però leggermente diversi dai precedenti; ma ciò dipende dall' avere il Mörsch trascurati gli sforzi di taglio. Se infatti si aggiunge nelle sue equazioni il termine della deformazione dovuta al taglio e si assume $\frac{E}{G} = 3$, si

[1]) Berechnung kreisförmiger Gewölbe gegen Wasserdruck (Schweiz. Bauzeitung - Maggio 1908).

TABELLA I.

$2\varphi_0$	$\cos\varphi_0$	$1-\frac{\operatorname{sen}\varphi_0}{\varphi_0}$	C_1	C_2	C_3	C_4	C_5
10°	0,9962	0,0012	0,0000	1,0060	0,0049	0,0176	0,0026
20°	0,9848	0,0052	0,0008	1,0256	0,0204	0,0708	0,0100
30°	0,9659	0,0115	0,0020	1,0573	0,0457	0,1592	0,0226
40°	0,9397	0,0202	0,0042	1,1015	0,0809	0,2821	0,0401
50°	0,9063	0,0315	0,0108	1,1587	0,1262	0,4390	0,0622
60°	0,8660	0,0451	0,0201	1,2284	0,1812	0,6291	0,0889
70°	0,8192	0,0610	0,0366	1,3106	0,2457	0,8508	0,1198
80°	0,7660	0,0793	0,0642	1,4062	0,3201	1,1043	0,1547
90°	0,7071	0,0997	0,1034	1,5144	0,4036	1,3869	0,1932
100°	0,6428	0,1222	0,1584	1,6356	0,4964	1,6978	0,2350
110°	0,5736	0,1467	0,2334	1,7702	0,5983	2,0357	0,2797
120°	0,5000	0,1730	0,3308	1,9183	0,7092	2,3993	0,3270
130°	0,4226	0,2011	0,4590	2,0808	0,8291	2,7871	0,3763
140°	0,3420	0,2309	0,6240	2,2584	0,9582	3,1977	0,4271
150°	0,2588	0,2621	0,8285	2,4515	1,0963	3,6300	0,4791
160°	0,1736	0,2947	1,0848	2,6620	1,2442	4,0836	0,5317
170°	0,0872	0,3285	1,4004	2,8912	1,4020	4,5569	0,5843
180°	0,0000	0,3634	1,7854	3,1416	1,5708	5,0514	0,6366

ritrovano col procedimento del Mörsch le stesse formule date da H. Ritter e dal Guidi.

Può essere interessante notare che se l'ampiezza dell'arco diminuisce, tendendo a zero, lo sforzo massimo σ'_i, tende a coincidere con quello di una trave rettilinea incastrata.

Basta per ciò, porre:

$$r = \frac{l}{2 \operatorname{sen} \varphi_0}$$

nella (5) e passare al limite per $\varphi_0 = 0$.

3. — È di grande importanza conoscere i limiti nei quali gli elementi geometrici dell'arco possono variare perchè non si abbiano mai sforzi di trazione.

Per questa ricerca H. Ritter osserva che, poichè l'arco che si considera è di spessore costante, e poichè gli sforzi massimi di compressione si verificano all'imposta, ivi si ha la massima eccentricità nella curva delle pressioni.

Ora la formula (6) fornisce appunto il valore e di tale eccentricità. Perchè non si abbia trazione all' estradosso dovrà essere:

$$e \lesssim \frac{h}{6}$$

Ponendo quindi nella (6) al posto di e il suo valor limite $\frac{h}{6}$ si otterrà:

$$\frac{h}{6} = \frac{h^2 r C_5}{2h^2 C_3 + r^2 C_1}$$

da cui:

$$2 C_3 h^2 - 6 C_5 r h + C_1 r^2 = 0 \tag{9}$$

Questa equazione quadratica risoluta rispetto ad h, ci dà per ogni sistema di valori di r e $2\varphi_0$, due valori distinti, h_1 ed h_2, dello spessore, per i quali la curva delle pressioni all'imposta risulta al limite del nocciolo.

Se lo spessore h, ha un valore compreso fra h_1 ed h_2 la curva esce dal nocciolo, mentre se lo spessore h è inferiore ad h_1, o superiore ad h_2, la curva rimane nell'interno del nocciolo e non si hanno quindi a temere sforzi di trazione.

Quando i valori di h dati dalla (9) risultassero immaginari la curva delle pressioni rimarrebbe nel nocciolo, qualunque sia lo spessore dell'arco.

Ciò avviene quando il discriminante della (9) risulti negativo; cioè:

$$(9 C_5^2 - 2 C_1 C_3) r^2 < 0$$

da cui:

$$2 C_1 C_3 > 9 C_5^2$$

Ora, con l'aiuto della Tabella I a pag. 19 e delle (7), è

facile vedere che questa diseguaglianza, che è indipendente da r, è verificata sempre che sia:

$$2\varphi_0 > 158^0$$

Il Ritter, per una corda di m. 20 e per diversi valori di $2\varphi_0$, calcola i corrispondenti valori di r, e poi quelli di h dati dalla (9), e costruisce la curva riportata in fig. 2.

Per valori di h e $2\varphi_0$ corrispondenti a punti situati nello spazio racchiuso fra la curva e l'asse verticale, si hanno

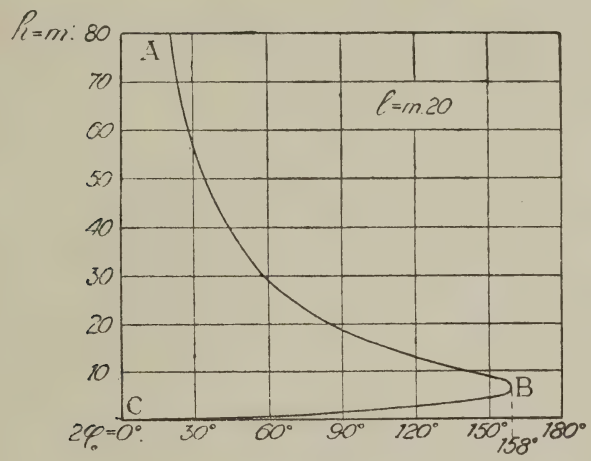


Fig. 2

sforzi di trazione all'estradosso di imposta; per valori corrispondenti a punti situati fuori del detto spazio non si verifica trazione in nessun punto dell'arco.

Un semplice sguardo alla fig. 2 mostra però che essa è costruita per la sua maggior parte fuori del campo pratico. È infatti assurdo pensare che con una corda di 20 m. lo spessore possa raggiungere valori di parecchie diecine di metri. Tutto il campo che si trova al disopra della orizzontale corrispondente a $h = 10$ m. circa, non ha importanza per la pratica, e quindi il solo arco CB della curva ci interessa. Esso dà per ogni ampiezza un valore minimo dello spessore, al di là del quale non si può andare senza che si verifichino sforzi di trazione.

La quistione è di troppo grande interesse perchè possa convenire fermarsi ad un esempio singolo, e mi sembra perciò opportuno completare l'analisi di H. Ritter, per ricavarne delle conseguenze più generali.

Se dividiamo la (9) per h^2, detto η il rapporto $\frac{r}{h}$, otteniamo:

$$C_1 \eta^2 - 6 C_5 \eta + 2 C_3 = 0$$

da cui

$$\eta = \frac{3 C_5 \pm \sqrt{9 C_5^2 - 2 C_1 C_3}}{C_1} \tag{10}$$

Ho calcolato quindi i valori di η corrispondenti ai diversi valori di $2\varphi_0$, ed i risultati sono riassunti più sotto nella Tab. II.

Per una data ampiezza, per es. per $2\varphi_0 = 120^0$, gli sforzi di trazione si avranno sempre che sia η compreso fra i valori delle due colonne; nel nostro caso fra 0,843 e 5,10.

Ma poichè i valori della colonna corrispondente al segno meno nella (10) sono inferiori a quelli che possono realizzarsi, perchè non è possibile che il rapporto $\frac{r}{h}$ scenda a va-

TABELLA II.

$2\varphi_0$	$\eta = \frac{3 C_5 - \sqrt{9 C_5^2 - 2 C_1 C_3}}{C_1}$	$\eta = \frac{3 C_5 + \sqrt{9 C_5^2 - 2 C_1 C_3}}{C_1}$
30°	0,700	67,15
50°	0,704	33,82
70°	0,718	18,93
90°	0,746	10,46
100°	0,772	8,12
110°	0,802	6,39
120°	0,843	5,10
130°	0,899	4,02
140°	0,999	3,12
150°	1,132	2,33
158°	1,700	1,70

lori troppo bassi, i valori da considerarsi sono solo quelli dell'ultima colonna.

Con essi è stato costruito il diagramma della fig. 3.

Si vedrà nel Cap. II che il rapporto $\frac{r}{h}$ di rado risulta inferiore a 5, e che in ogni caso non conviene mai tenerlo

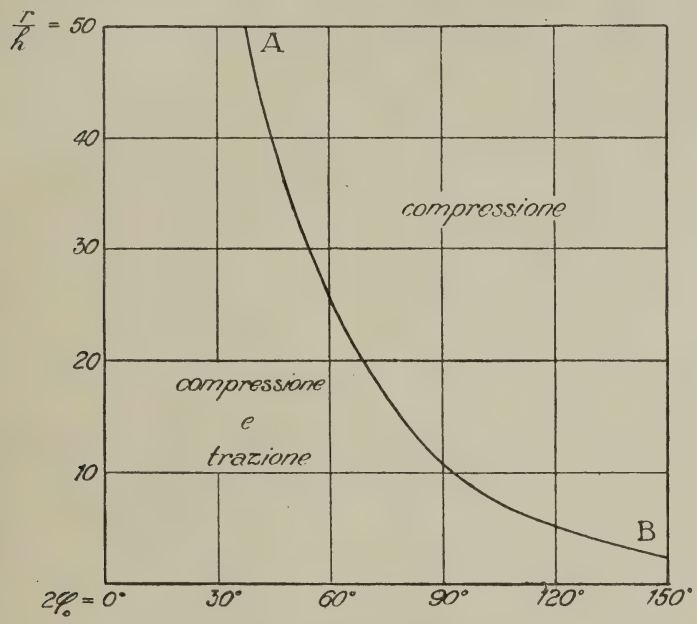


Fig. 3

inferiore a 3; si può quindi ritenere che da una ampiezza di $130 \div 140^0$ in sopra la condizione:

$$e < \frac{h}{6}$$

è praticamente sempre verificata.

D'altra parte, come meglio si vedrà in seguito, il rapporto η è in genere tanto più piccolo quanto maggiore è la pressione idrostatica e quanto minore è l'ampiezza $2\varphi_0$.

Ora in dighe ad archi multipli si può assumere

$$2\varphi_0 > 130^0 \div 140^0$$

in modo da evitare sforzi di trazione, ma nelle dighe ad

arco unico impostate in vallate che vanno restringendosi in basso, si verifica che verso la base della diga diminuiscono le ampiezze ed aumentano le pressioni; conseguentemente il rapporto η diminuisce.

Inoltre la Tab. II mostra che i valori minimi di η, per i quali non vi sia trazione aumentano rapidamente al diminuire dell'ampiezza. Ne risulta quindi che negli anelli inferiori di una diga ad arco semplice è impossibile evitare gli sforzi di trazione.

Questa affermazione però è basata sulla ipotesi che gli anelli di una diga a volta siano indipendenti, mentre la solidarietà di essi (v. Guidi op. cit.), tende a centralizzare la curva delle pressioni, e tanto più quanto più l'anello è prossimo alla base.

Tuttavia nella ipotesi di anelli indipendenti, si può concludere, per quanto riguarda gli sforzi di trazione dovuti al solo carico idrostatico:

a) che di essi non occorre tener conto finchè l'ampiezza $2\varphi_0$ sia maggiore di $130^0 \div 140^0$ gradi;

b) che essi sono inevitabili quando le ampiezze scendono a valori molto bassi, specie se contemporaneamente aumenta il carico;

c) che per ogni ampiezza esiste un valore di η, dato dall'ultima colonna della Tabella II, o dal diagramma della fig. 3, al di sotto del quale — cioè per maggiori spessori — si presentano sforzi di trazione.

Una ricerca analoga può essere fatta per la sezione di chiave.

Si deduce una equazione di secondo grado in h, simile alla (9), il cui discriminante si annulla per $2\varphi_0 = 115^0$ circa Per ampiezze maggiori non si hanno sforzi di trazione in chiave qualunque sia lo spessore.

Tenendo conto però del limite pratico dei valori di η, così come si è detto per la sezione di imposta, si può concludere che nella sezione di chiave non si verificano sforzi di trazione, sempre che sia almeno $2\varphi_0 > 90^0$.

4. — Sforzi dovuti a variazioni di temperatura. — Oltre gli sforzi dovuti alla pressione dell'acqua conviene considerare quelli prodotti da variazioni termiche.

Questo argomento sarà più diffusamente trattato nel Cap. III.

Qui basterà ricordare che una variazione di temperatura eguale per tutto l'arco, genera una reazione di imposta, che è una forza parallela alla corda dell'arco e la cui retta d'azione passa per il baricentro elastico di esso.

Il suo valore è:

$$H_t = \frac{E \alpha t \cdot h^3}{r^2 C_1 + h^2 C_2} = E \alpha t \frac{h^3}{6 \Im r^2}$$

essendo α ed E il coefficiente di dilatazione lineare ed il modulo di elasticità del materiale, e t la variazione di temperatura (H. Ritter loc. cit.).

Il Guidi tratta il caso di una distribuzione di temperatura non uniforme, ma variabile con legge lineare dallo intradosso all' estradosso. Supponendo scomposta detta distribuzione in una uniforme ed una lineare, ma con valor nullo sull'arco medio, con calcolo semplice ed elegante, giunge alle formule:

$$(11) \quad \begin{cases} \varsigma_e = -E \alpha \left(t_0 \frac{h}{r} \mu_e - \frac{\Delta t}{2} \right) \\ \varsigma_i = \quad E \alpha \left(t_0 \frac{h}{r} \mu_i - \frac{\Delta t}{2} \right) \\ \varsigma'_e = \quad E \alpha \left(t_0 \frac{h}{r} \mu'_e + \frac{\Delta t}{2} \right) \\ \varsigma'_i = -E \alpha \left(t_0 \frac{h}{r} \mu'_i + \frac{\Delta t}{2} \right) \end{cases}$$

dove ς sono gli sforzi unitari [1]) all'estradosso ed all'intradosso, in chiave ed all'imposta, dovuti alla temperatura; t_0 è la variazione media di temperatura; Δt la differenza di temperatura fra le due facce della diga.

Sforzi analoghi a quelli prodotti da un abbassamento

---

[1]) Anche qui gli sforzi sono cambiati di segno avendo assunto positivi gli sforzi di compressione.

uniforme della temperatura, sono dovuti alla contrazione di volume che subisce il calcestruzzo di cemento all'atto della presa, come si vedrà a suo tempo.

5. — Arco di spessore variabile, soggetto a carico idrostatico uniforme. — Allo scopo di eguagliare gli sforzi massimi in chiave ed all'imposta, è stato proposto di aumentare lo spessore o diminuire il raggio di curvatura, in prossimità delle imposte.

Non conviene in questo caso ricorrere ad un calcolo diretto come per l'arco circolare di spessore costante, ma si può eseguire un calcolo di verifica.

H. Ritter esamina separatamente le due soluzioni, e per dare una idea della loro convenienza traccia una verifica grafica di stabilità per alcuni casi determinati.

Sostituendo all'arco circolare una policentrica con opportuni raggi riesce ad ottenere che la curva delle pressioni si accosti di più, verso l'imposta, all'arco baricentrico, migliorandosi così le condizioni statiche della volta.

Tuttavia per ampiezze $2\varphi_0$ molto grandi il vantaggio conseguito è tanto lieve che può dirsi trascurabile.

Ne deduce il Ritter che questo provvedimento può essere utile in dighe ad arco unico, ma che non è consigliabile per dighe ad archi multipli, poichè in queste l'ampiezza degli archi è in genere non lontana dai 180°.

Per un aumento di spessore verso la imposta, una prova grafica mostra che tra due archi aventi la stessa linea baricentrica, di cui uno con spessore costante e l'altro con spessore crescente dalla chiave agli appoggi, quest'ultimo ha la curva delle pressioni più vicina all'arco baricentrico, tanto nella sezione di chiave che di imposta.

Ciò si verifica tanto se si ingrossa verso l'imposta, quanto se si assottiglia verso la chiave un arco di spessore costante.

In questo secondo caso l'arco di spessore variabile risulta di minor volume e soggetto a minori sforzi.

Si può ottenere così un risparmio di cubatura, unitamente ad una leggera riduzione degli sforzi massimi.

Il Ritter propone il seguente procedimento.

Si supponga costruito un arco di spessore costante h, calcolato in modo che all'imposta si abbia:

$$\sigma'_i = k$$

essendo k il carico di sicurezza a compressione.

Il valore di h si determinerà per tentativi, a mezzo della (5), o dell'ultima delle (8), essendo dati r e $2\varphi_0$ e quindi le C.

Si supponga ora di assottigliare gradualmente l'arco verso la chiave, fino ad avere ivi uno spessore ridotto h_0.

Se si ammette che questo assottigliamento sia senza influenza sul valore di H_p, e che quindi sia sempre:

$$H_p = p\,r\,\frac{h^2}{r^2 C_1 + h^2 C_2}$$

lo sforzo massimo in chiave sarà dato da:

$$\sigma_e = \frac{p\,r}{h_0} + \frac{6 H_p y_e}{h_0^2}$$

dove y_e è relativo alla sezione ridotta di spessore h_0; cioè, per le (4):

$$y_e = r\left(1 - \frac{\operatorname{sen}\varphi_0}{\varphi_0}\right) - \frac{h_0}{6}$$

Sostituendo ed osservando che, essendo trascurabile la variazione di lunghezza dell'estradosso conseguente alla modifica degli spessori, si può ritenere sempre:

$$p\,r = p_e\left(r + \frac{h}{2}\right)$$

si ha:

$$\sigma_e = p_e\left(r + \frac{h}{2}\right)\left\{\frac{1}{h_0} + \frac{h^2}{r^2 C_1 + h^2 C_2}\cdot\frac{6}{h_0^2}\cdot\left[r\left(1 - \frac{\operatorname{sen}\varphi_0}{\varphi_0}\right) - \frac{h_0}{6}\right]\right\}$$

Di qui, posto $\sigma_e = k$, si ottiene:

$$(12)\quad \frac{k}{p_e\left(r + \frac{h}{2}\right)}\cdot h_0^2 - \left(1 - \frac{h^2}{r^2 C_1 + h^2 C_2}\right)\cdot h_0 - \frac{6\,r\,h^2\left(1 - \frac{\operatorname{sen}\varphi_0}{\varphi_0}\right)}{r^2 C_1 + h^2 C_2} = 0$$

equazione quadratica in h_0, la cui unica radice positiva fornisce il valore da assegnare allo spessore in chiave.

H. Ritter applica ad un esempio numerico questo metodo, riuscendo ad ottenere una economia del 5,6 % sul volume della diga.

Una variazione dello spessore può convenire anche allo scopo di evitare completamente sforzi di trazione all'estradosso d'imposta. In questo caso, anzichè assottigliare verso la chiave lo spessore già determinato dell' arco, conviene ingrossarlo verso la imposta.

Se l'arco è di ampiezza maggiore di $90^0 \div 100^0$, ma minore di $130^0 \div 140^0$ in modo che in chiave non si hanno sforzi di trazione, mentre essi sono prevedibili all'imposta — se pure di lieve entità, — si può fissare con la (5), o le (8) il valore di h, e poi aumentare gli spessori gradualmente verso le spalle.

Ammettendo che questo aumento di spessore sia tanto lieve da non avere influenza sulla posizione della curva delle pressioni, detto h_1 lo spessore all'imposta, dovrà essere, per la (6), posto la eccentricità $e = \frac{h_1}{6}$:

$$h_1 = \frac{6 h^2 r C_5}{2 h^2 C_3 + r^2 C_1} \tag{13}$$

Il procedimento è ammissibile solo se il valore h_1 così calcolato risulti poco diverso da h.

6. — Arco di spessore costante, soggetto a carico idrostatico variabile. — Nei casi precedenti abbiamo sempre supposto che la pressione idrostatica sia costante su tutto l' estradosso dell'arco.

Quando però si considerino dighe ad archi multipli con generatrici inclinate, scomposte in anelli secondo piani normali alle generatrici, il carico idrostatico non sarà più uniforme, perchè la chiave dell'arco si troverà ad una profondità sotto il pelo d' acqua minore che non la imposta; e questa differenza sarà proporzionalmente tanto maggiore quanto più l'anello è prossimo alla superficie del lago.

Questo caso è stato ampiamente trattato dal Guidi (Statica delle dighe), e non ne riporterò per esteso il calcolo, ri-

mandando alla fonte citata, ben nota del resto a quanti si interessano di questo genere di costruzioni.

L'autore dà una soluzione grafica per qualsiasi distribuzione simmetrica di pressioni normali all'estradosso; nel caso poi che la legge di tale distribuzione possa ritenersi parabolica con valore p all'imposta e μp in chiave,—essendo sempre p riferito all'arco medio, e quindi $p = p_e \frac{r + \frac{h}{2}}{r}$, — sviluppa analiticamente il calcolo, trovando per la spinta H totale in chiave, e per il suo momento $\mathfrak{M}$ rispetto al baricentro elastico dell'arco, i valori:

$$(14)\quad \begin{cases} H = pr\left[\mu\left(1 - \frac{h^2}{6\vartheta r^2}\right) + 8(1-\mu)\left(\frac{r}{s}\right)^2 \frac{\varepsilon}{\theta}\right] \\ \mathfrak{M} = pr^2\left\{\mu\frac{s-l}{s} + 2(1-\mu)\left[\frac{1}{6} - \left(\frac{2r}{s}\right)^2 \frac{s-l}{s}\right]\right\} \end{cases}$$

In esse i simboli hanno i significati già dati innanzi, e:

$$(14')\quad \begin{aligned} \varepsilon = {} & 2\left[\frac{1}{6}\left(\frac{s}{2r}\right)^2 + \frac{l}{s} - 1\right] - \\ & - \frac{1}{2}\left(1 - \frac{h^2}{6r^2}\right)\left[\left(\frac{s}{2r}\right)^2 - \frac{1}{2}\left(\frac{l}{r}\right)^2 + 2\frac{f}{r}\cdot\frac{r-f}{r}\right] + \\ & + \frac{s}{l}\left(1 + \frac{h^2}{3r^2}\right)\left(3\frac{l}{s} - \frac{sl}{8r^2} - 2\frac{r-f}{r} - 1\right) \end{aligned}$$

La eccentricità e della spinta H rispetto al centro della sezione di chiave, tenuto conto della distanza fra detto punto ed il baricentro elastico dell'arco, sarà:

$$(14'')\quad e = \frac{\mathfrak{M}}{H} - \frac{s-l}{s}r = \frac{\mathfrak{M}}{H} - \left(1 - \frac{\operatorname{sen}\varphi_0}{\varphi_0}\right)r$$

Una tabella opportunamente studiata facilita la calcolazione delle sopradette formule.

Per effetto della suddetta legge di carico idrostatico, le condizioni di carico in chiave sono migliorate, mentre alla imposta il carico massimo aumenta, benchè di una piccolissima quantità, rispetto a quello dato dalla pressione uniforme.

Il Guidi avverte che ad ovviare a tale aumento di sforzo basta raccordare l'intradosso della diga con le spalle mediante un breve tratto di direttrice di maggior curvatura.

Con questo opportuno accorgimento si può quindi trascurare il calcolo rigoroso della pressione non uniforme.

7. — Arco di spessore costante, soggetto al peso proprio. — Nella stabilità di un anello di diga a generatrici inclinate occorre tener conto anche del peso proprio dello anello [1]).

Se γ è il peso specifico della struttura, il peso γh per metro lineare di sviluppo dell'arco si potrà supporre scomposto in una componente parallela alle generatrici ed in una normale.

Quest' ultima, che vale:

$$\gamma h \cos \alpha$$

se α è l'inclinazione delle generatrici all' orizzonte, grava sull'arco, e da esso è trasmessa al contrafforte.

Per calcolare analiticamente i valori di H ed $\mathfrak{M}$ dovuti a questo carico uniforme lungo l'arco, ed agente normalmente alla corda, possiamo procedere analogamente a quanto fa il Guidi per la pressione idrostatica variabile.

Supponiamo cioè che sull'arco di sezione costante agiscano due forze verticali e simmetricamente disposte, di intensità P.

Consideriamo (fig. 4) il semiarco di sinistra come incastrato nella sezione di imposta $m\,n$ e libero in chiave, sotto l'azione della forza P e della spinta H, parallela alla corda per la simmetria.

Obblighiamo la spinta H a passare per il baricentro elastico G' del semiarco, con l'aggiunta del momento $\mathfrak{M}$.

Poichè la sezione di chiave non può nè ruotare nè spostarsi parallelamente alla corda, si avrà, per la teoria della ellisse di elasticità, e sostituendo il peso elastico di ogni

---

[1]) Ciò è esplicitamente richiesto dalle Norme Ministeriali in vigore.

elemento con l'arco elementare ds a cui è proporzionale:

$$
(15) \quad \begin{cases} -\frac{s}{2}\,\mathfrak{M} + P\int_{\beta}^{\varphi_0} z\,ds = 0 \\ -H\,I_x + P\int_{\beta}^{\varphi_0} z\,y\,ds = 0 \end{cases}
$$

dove β è l'angolo compreso fra la chiave ed il punto di applicazione della forza P; z è la distanza CQ fra il centro C

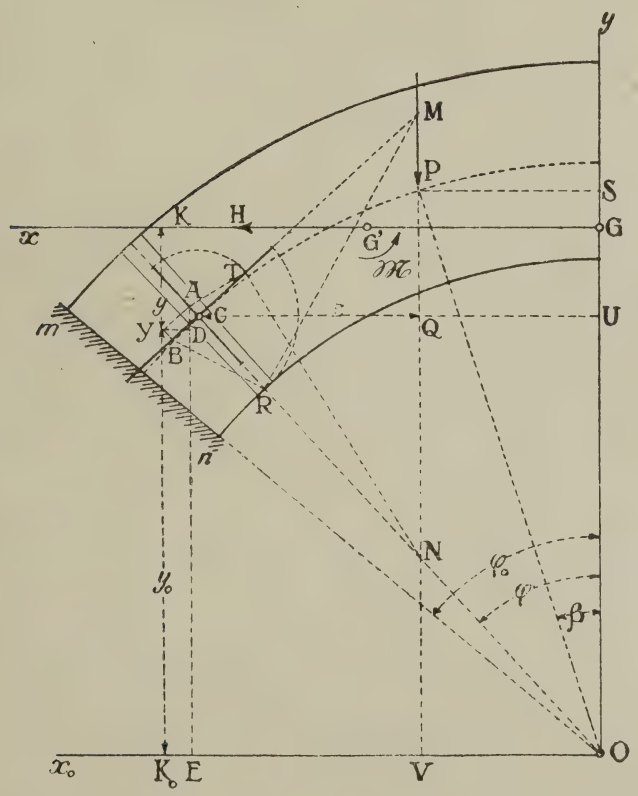


Fig. 4

di un elemento di arco e la forza P; y è la distanza YK dall'asse Gx dell'antipolo Y della forza P, rispetto all'ellisse

di elasticità di un elemento di arco; e finalmente I_x è il momento di inerzia del semiarco elastico rispetto all'asse Gx.

Ora è noto (v. Guidi op. cit.) che:

$$I_x = \frac{l r^2 \vartheta}{4}$$

D' altra parte:

$$z = CQ = CU - QU = CU - PS = r(\operatorname{sen}\varphi - \operatorname{sen}\beta)$$
$$y = OG - y_0$$

chiamando y_0 la distanza di Y dall'asse Ox_0; ma:

$$OG = r\frac{\operatorname{sen}\varphi_0}{\varphi_0}$$

perchè G coincide col baricentro dell'arco medio; quindi

$$y = r\frac{\operatorname{sen}\varphi_0}{\varphi_0} - y_0$$

Il calcolo di y_0 non presenta difficoltà se si tiene presente la fig. 4.

Infatti:

$$y_0 = YK_0 = DE = AE - AD$$
$$AE = AO\cos\varphi = (r + CA)\cos\varphi$$

ma:

$$CA = \frac{\rho^2}{CN}$$

essendo ρ^2 il quadrato del semiasse minore dell'ellisse di elasticità dell'elemento; e:

$$CN = r - NO = r - \frac{OV}{\operatorname{sen}\varphi} = r\frac{PS}{\operatorname{sen}\varphi} =$$
$$= r - \frac{r\operatorname{sen}\beta}{\operatorname{sen}\varphi} = r\frac{\operatorname{sen}\varphi - \operatorname{sen}\beta}{\operatorname{sen}\varphi}$$

quindi:

$$CA = \frac{\rho^2}{r}\cdot\frac{\operatorname{sen}\varphi}{\operatorname{sen}\varphi - \operatorname{sen}\beta}$$

e poi:

$$AE = \left(r + \frac{\rho^2}{r}\cdot\frac{\operatorname{sen}\varphi}{\operatorname{sen}\varphi - \operatorname{sen}\beta}\right)\cos\varphi$$

D'altra parte:

$$AD = AY \operatorname{sen} \varphi$$

perchè l'angolo $AYD = \varphi$, e:

$$AY = CB = \frac{\rho_1^2}{CM}$$

essendo ρ_1 l'altro semiasse dell'ellisse di elasticità dell'elemento.

Poi:

$$CM = CN \operatorname{tg} \varphi = \left(r \frac{\operatorname{sen} \varphi - \operatorname{sen} \beta}{\operatorname{sen} \varphi} \right) \operatorname{tg} \varphi$$

quindi:

$$CB = \frac{\rho_1^2}{r \operatorname{tg} \varphi} \cdot \frac{\operatorname{sen} \varphi}{\operatorname{sen} \varphi - \operatorname{sen} \beta}$$

e:

$$AD = \frac{\rho_1^2}{r} \cdot \frac{\operatorname{sen} \varphi \cos \varphi}{\operatorname{sen} \varphi - \operatorname{sen} \beta}$$

Si ottiene infine:

$$y = r \frac{\operatorname{sen} \varphi_0}{\varphi_0} - r \cos \varphi + \left(\frac{\rho_1^2}{r} - \frac{\rho^2}{r} \right) \frac{\operatorname{sen} \varphi \cos \varphi}{\operatorname{sen} \varphi - \operatorname{sen} \beta}$$

ossia:

$$y = r \left(\frac{\operatorname{sen} \varphi_0}{\varphi_0} - \cos \varphi \right) + \frac{\rho_1^2 - \rho^2}{r} \frac{\operatorname{sen} \varphi \cos \varphi}{\operatorname{sen} \varphi - \operatorname{sen} \beta}$$

Possiamo ora passare al calcolo degli integrali, osservando che $ds = r\, d\varphi$

$$\int_\beta^{\varphi_0} z\, ds = r^2 \int_\beta^{\varphi_0} (\operatorname{sen} \varphi - \operatorname{sen} \beta)\, d\varphi = r^2 [(\cos \beta - \cos \varphi_0) - (\varphi_0 - \beta) \operatorname{sen} \beta]$$

$$\int_\beta^{\varphi_0} z\, y\, ds = r^3 \int_\beta^{\varphi_0} \left(\frac{\operatorname{sen} \varphi_0}{\varphi_0} - \cos \varphi \right) (\operatorname{sen} \varphi - \operatorname{sen} \beta)\, d\varphi +$$

$$+ r (\rho_1^2 - \rho^2) \int_\beta^{\varphi_0} \operatorname{sen} \varphi \cos \varphi\, d\varphi =$$

$$= - r^3 \frac{\operatorname{sen} \varphi_0}{\varphi_0} (\varphi_0 - \beta) \operatorname{sen} \beta - r^3 \frac{\operatorname{sen} \varphi_0}{\varphi_0} (\cos \varphi - \cos \beta) +$$

$$+ r^3 \operatorname{sen} \beta (\operatorname{sen} \varphi_0 - \operatorname{sen} \beta) + \frac{r}{2} (\rho_1^2 - \rho^2 - r^2) (\operatorname{sen}^2 \varphi_0 - \operatorname{sen}^2 \beta)$$

Sostituendo questi valori nelle (15), ricordando il valore di I_x, e tenendo presente che (v. Guidi. loc. cit.):

$$\rho_1^2 - \rho^2 = \frac{1}{4} h^2 - \frac{1}{12} h^2 = \frac{1}{6} h^2$$

e che:

$$\frac{r}{s} = \frac{1}{2\varphi_0} \qquad \frac{r}{l} = \frac{1}{2 \operatorname{sen} \varphi_0}$$

si ottiene, dopo riduzioni:

$$(16) \begin{cases} \mathfrak{M} = Pr \left[\dfrac{\beta \operatorname{sen} \beta}{\varphi_0} + \dfrac{\cos \beta}{\varphi_0} - \dfrac{\cos \varphi_0}{\varphi_0} - \operatorname{sen} \beta \right] \\ H = \dfrac{2P}{\vartheta} \left\{ -\dfrac{1}{2}\left(1 + \dfrac{1}{6}\dfrac{h^2}{r^2}\right) \dfrac{\operatorname{sen}^2 \beta}{\operatorname{sen} \varphi_0} + \dfrac{\beta \operatorname{sen} \beta}{\varphi_0} + \dfrac{\cos \beta}{\varphi_0} - \dfrac{\cos \varphi_0}{\varphi_0} - \right. \\ \qquad \left. - \dfrac{1}{2}\left(1 - \dfrac{1}{6}\dfrac{h^2}{r^2}\right) \operatorname{sen} \varphi_0 \right\} \end{cases}$$

8. — Le (16) possono essere utili per una qualsiasi distribuzione simmetrica di forze normali alla corda.

In particolare, nel caso che ci occupa, sostituiamo:

$$\begin{aligned} P &= \gamma \cos \alpha \cdot h r d \beta \\ &= \gamma_1 h r d \beta \end{aligned}$$

— avendo posto eguale a γ_1 l'aliquota $\gamma \cos \alpha$ del peso specifico dell'arco, che grava sui contrafforti, — ed integriamo le (16) rispetto a β, fra i limiti 0 e φ_0.

Avremo:

$$\mathfrak{M} = \gamma_1 h r^2 \left\{ \frac{1}{\varphi_0} \int_0^{\varphi_0} \beta \operatorname{sen} \beta \, d\beta + \frac{1}{\varphi_0} \int_0^{\varphi_0} \cos \beta \, d\beta - \right.$$

$$\left. - \frac{\cos \varphi_0}{\varphi_0} \int_0^{\varphi_0} d\beta - \int_0^{\varphi_0} \operatorname{sen} \beta \, d\beta \right\}$$

e:

$$H = \frac{2\gamma_1 hr}{\mathfrak{J}} \left\{ -\frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{6}\frac{h^2}{r^2}\right)\frac{1}{\operatorname{sen}\varphi_0}\int_0^{\varphi_0} \operatorname{sen}^2\beta\, d\beta + \right.$$

$$+ \frac{1}{\varphi_0}\int_0^{\varphi_0} \beta \operatorname{sen}\beta\, d\beta + \frac{1}{\varphi_0}\int_0^{\varphi_0} \cos\beta\, d\beta - \frac{\cos\varphi_0}{\varphi_0}\int_0^{\varphi_0} d\beta -$$

$$\left. - \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{6}\frac{h^2}{r^2}\right)\operatorname{sen}\varphi_0 \int_0^{\varphi_0} d\beta \right\}$$

Svolgendo gli integrali e riducendo:

$$(17) \quad \begin{cases} \mathfrak{M} = \gamma_1 h r^2 \left(\dfrac{2\operatorname{sen}\varphi_0}{\varphi_0} - \cos\varphi_0 - 1\right) \\ H = \dfrac{\gamma_1 hr}{\mathfrak{J}} \left\{ \dfrac{h^2}{6r^2}\left(\dfrac{1}{2}\cos\varphi_0 - \dfrac{\varphi_0}{2\operatorname{sen}\varphi_0} + \varphi_0 \operatorname{sen}\varphi_0\right) - \right. \\ \qquad \left. - \dfrac{7}{2}\cos\varphi_0 - \dfrac{\varphi_0}{2\operatorname{sen}\varphi_0} + \dfrac{4\operatorname{sen}\varphi_0}{\varphi_0} - \varphi_0 \operatorname{sen}\varphi_0 \right\} \end{cases}$$

Se ora teniamo presente la (8‴) e poniamo:

$$(18) \quad \begin{cases} C_6 = \dfrac{2\operatorname{sen}\varphi_0}{\varphi_0} - \cos\varphi_0 - 1 \\ C_7 = 6\left\{ -\dfrac{7}{2}\cos\varphi_0 - \dfrac{\varphi_0}{2\operatorname{sen}\varphi_0} + \dfrac{4\operatorname{sen}\varphi_0}{\varphi_0} - \varphi_0 \operatorname{sen}\varphi_0 \right\} \\ C_8 = \dfrac{1}{2}\cos\varphi_0 - \dfrac{\varphi_0}{2\operatorname{sen}\varphi_0} + \varphi_0 \operatorname{sen}\varphi_0 \end{cases}$$

sarà facile mettere le (17) sotto la forma semplicissima:

$$(19) \quad \begin{cases} \mathfrak{M} = \gamma_1 h r^2 C_6 \\ H = \gamma_1 hr \dfrac{C_7 + \dfrac{h^2}{r^2} C_8}{C_1 + \dfrac{h^2}{r^2} C_2} \end{cases}$$

in cui le C sono funzioni solo di φ_0.

Invece del momento $\mathfrak{M}$ può convenire conoscere l'eccentricità e della H rispetto al centro della sezione di chiave.

Sarà per la (14″)

$$e = \frac{\mathfrak{M}}{H} - \left(1 - \frac{\operatorname{sen} \varphi_0}{\varphi_0}\right) r$$

e con facili calcoli:

$$e = r \frac{C_9 + \frac{h^2}{r^2} C_{10}}{C_7 + \frac{h^2}{r^2} C_8} \tag{19'}$$

avendo posto ancora:

$$\left\{ \begin{aligned} C_9 &= C_1 C_6 - \left(1 - \frac{\operatorname{sen} \varphi_0}{\varphi_0}\right) C_7 \\ C_{10} &= C_2 C_6 - \left(1 - \frac{\operatorname{sen} \varphi_0}{\varphi_0}\right) C_8 \end{aligned} \right. \tag{18'}$$

Nella sezione di chiave si avrà quindi una pressione normale, ed un momento, dati da:

$$\left\{ \begin{aligned} H &= \gamma_1 h r \frac{C_9 + \frac{h^2}{r^2} C_8}{C_1 + \frac{h^2}{r^2} C_2} \\ M &= H e = \gamma_1 h r^2 \frac{C_9 + \frac{h^2}{r^2} C_8}{C_1 + \frac{h^2}{r^2} C_2} \end{aligned} \right. \tag{20}$$

Nella sezione di imposta avremo una pressione normale:

$$N = P \operatorname{sen} \varphi_0 + H \cos \varphi_0$$

ed un momento:

$$M_1 = H(f + e) - P \delta$$

dove P è il peso di tutto il semiarco, applicato a metà della lunghezza del semiarco stesso, e δ è la distanza fra il centro della sezione di imposta ed il peso P.

Si ha evidentemente:

$$P = \gamma_1 r h \varphi_0$$

$$\delta = r\left(\operatorname{sen} \varphi_0 - \operatorname{sen} \frac{\varphi_0}{2}\right)$$

$$f = r(1 - \cos \varphi_0)$$

Sostituendo questi valori e tenendo presenti le espressioni di H e di e, si ottiene, dopo riduzioni:

$$
(21) \quad \begin{cases} N = \gamma_1 h r \dfrac{C_{11} + \dfrac{h^2}{r^2} C_{12}}{C_1 + \dfrac{h^2}{r^2} C_2} \\[2ex] M_1 = \gamma_1 h r^2 \dfrac{C_{13} + \dfrac{h^2}{r^2} C_{14}}{C_1 + \dfrac{h^2}{r^2} C_2} \end{cases}
$$

avendo posto successivamente:

$$
(18'') \quad \begin{cases} C_{11} = C_1 \varphi_0 \operatorname{sen} \varphi_0 + C_7 \cos \varphi_0 \\ C_{12} = C_2 \varphi_0 \operatorname{sen} \varphi_0 + C_8 \cos \varphi_0 \\ C_{13} = C_1 \varphi_0 \left(\operatorname{sen} \dfrac{\varphi_0}{2} - \operatorname{sen} \varphi_0 \right) + C_7 (1 - \cos \varphi_0) + C_9 \\ C_{14} = C_2 \varphi_0 \left(\operatorname{sen} \dfrac{\varphi_0}{2} - \operatorname{sen} \varphi_0 \right) + C_8 (1 - \cos \varphi_0) + C_{10} \end{cases}
$$

Le quantità C sono funzioni solo dell'ampiezza.

I valori delle C da C_1 a C_5 sono stati riportati a pag. 19, dalla tabella calcolata dal Ritter.

Le C da C_6 a C_{14} le ho calcolate per ampiezze da 120° a 180°, ritenendo superfluo il calcolo per ampiezze minori. Infatti il peso proprio influisce nel calcolo dell'arco solo quando le generatrici della volta sono inclinate, ciò che avviene esclusivamente nelle dighe ad archi multipli, nelle quali le volte hanno sempre ampiezze rilevanti.

I valori delle C da C_6 a C_{14} sono raccolti nella Tab. III a pagina 39.

Con l'aiuto di esse è facilissimo il calcolo delle (20) e (21), quando siano assegnati h, r, e $\gamma_1 = \gamma \cos \alpha$.

Si può anzi direttamente eseguire il calcolo degli sforzi unitari massimi σ, in chiave ed all'imposta.

Ricordando che in chiave:

$$
\sigma = \frac{N}{h} \pm \frac{6 M}{h^2}
$$

ed all'imposta:

$$\sigma' = \frac{N}{h} \mp \frac{6 M_1}{h^2}$$

si ha per le (20) e (21):

in chiave:

$$(22) \quad \begin{cases} \sigma = \dfrac{\gamma_1 r}{C_1 + \dfrac{h^2}{r^2} C_2} \left[\left(C_7 + \dfrac{h^2}{r^2} C_8 \right) \pm 6 \cdot \dfrac{r}{h} \left(C_9 + \dfrac{h^2}{r^2} C_{10} \right) \right] \\ \text{ed all'imposta:} \\ \sigma' = \dfrac{\gamma_1 r}{C_1 + \dfrac{h^2}{r^2} C_2} \left[\left(C_{11} + \dfrac{h^2}{r^2} C_{12} \right) \mp 6 \cdot \dfrac{r}{h} \left(C_{13} + \dfrac{h^2}{r^2} C_{14} \right) \right] \end{cases}$$

dove il segno superiore dà i valori all'estradosso, e l'inferiore all'intradosso.

Per mostrare un esempio numerico, si abbia lo stesso arco che considera il Guidi (op. cit.), con $2\varphi_0 = 150^\circ$, $\frac{r}{h} = 12{,}5$, posto alla profondità di 15 metri sotto il livello d'acqua.

Appartenga esso ad una volta con generatrici inclinate a 60°, per cui, se è 2200 kg/m^3 il peso specifico della muratura, sarà:

$$\gamma_1 = 0{,}5 \times 2200 = 1100$$

Dalle Tab. I e III, si ricavano immediatamente i valori delle C, e quindi, essendo:

$$\frac{h^2}{r^2} = \frac{1}{12{,}5^2} = 0{,}0064$$

ıs calcolano i termini:

$$C_1 + \frac{h^2}{r^2} C_2 = 0{,}8285 + 0{,}0064 \times 2{,}4515 = 0{,}8442$$

$$C_7 + \frac{h^2}{r^2} C_8 = 0{,}6234 + 0{,}0064 \times 0{,}7162 = 0{,}6280$$

$$C_9 + \frac{h^2}{r^2} C_{10} = 0{,}0163 + 0{,}0064 \times 0{,}3444 = 0{,}0185$$

$$C_{11} + \frac{h^2}{r^2} C_{12} = 1{,}2080 + 0{,}0064 \times 3{,}2843 = 1{,}2290$$

$$C_{13} + \frac{h^2}{r^2} C_{14} = 0{,}0917 - 0{,}0064 \times 2{,}2707 = 0{,}0800$$

Se il raggio $r = 5$ metri, si ha ancora;

$$\frac{\gamma_1 r}{C_1 + \frac{h^2}{r^2} C_2} = \frac{1100 \times 5}{0{,}8442} = 6515$$

e quindi [1]:

$$\sigma_e = 6515\,(0{,}6280 + 6 \times 12{,}5 \times 0{,}0185) = \quad 1{,}31\ ^{kg.}/_{cmq.}$$
$$\sigma_i = 6515\,(0{,}6280 - 6 \times 12{,}5 \times 0{,}0185) = -\ 0{,}49\ ^{kg.}/_{cmq.}$$
$$\sigma'_e = 6515\,(1{,}2290 - 6 \times 12{,}5 \times 0{,}0800) = -\ 3{,}11\ ^{kg.}/_{cmq.}$$
$$\sigma'_i = 6515\,(1{,}2290 + 6 \times 12{,}5 \times 0{,}0800) = \quad 4{,}71\ ^{kg.}/_{cmq.}$$

Come si vede il carico del peso proprio non è trascurabile, perchè mentre la massima compressione dovuta al carico idrostatico ed alla temperatura risulta, dal calcolo del Guidi, di 36,4 $^{kg.}/_{cmq.}$, considerando anche il peso proprio questo valore sale a 41,1 $^{kg.}/_{cmq.}$

TABELLA III.

$2\varphi_0$	C_6	C_7	C_8	C_9	C_{10}	C_{11}	C_{12}	C_{13}	C_{14}
120°	0,1540	0,2790	0,5523	0,0027	0,2001	0,4395	2,0156	0,0152	— 0,2592
130°	0,1752	0,3750	0,6138	0,0050	0,2413	0,6304	2,3985	0,0291	— 0,2761
140°	0,1962	0,4872	0,6690	0,0099	0,2886	0,8831	2,8204	0,0510	— 0,2816
150°	0,2170	0,6234	0,7162	0,0163	0,3444	1,2080	3,2843	0,0917	— 0,2707
160°	0,2370	0,7779	0,7529	0,0278	0,4093	1,6275	3,7957	0,1516	— 0,2450
170°	0,2558	0,9498	0,7769	0,0462	0,4847	2,1526	4,3417	0,2471	— 0,1821
180°	0,2732	1,1412	0,7854	0,0733	0,5729	2,8050	4,9375	0,3920	— 0,0897

9. — Arco con spessore e carico variabili. — Se l'arco ha sezione variabile ed è comunque caricato, non può calcolarsi analiticamente in modo agevole.

Conviene allora ricorrere ad uno qualunque dei metodi grafici o grafico-analitici per la verifica di stabilità di un arco, che si appoggiano alla teoria della elasticità.

[1]) Ricordo che ho tenuto positivi gli sforzi di compressione.

In particolare può seguirsi il metodo dell'ellisse di elasticità, riportato dal Guidi nella citata « *Statica delle Dighe* ».

Questo metodo però, come è noto, richiede una lunga serie di operazioni grafiche delicate, le quali spesso conviene riscontrare con procedimenti analitici, per essere garantiti da errori sensibili. Esso è vantaggioso qualora, come per gli archi da ponte, convenga tener conto di diverse ipotesi di carico, anche dissimmetrico, perchè le linee di influenza, la curva intersezione delle reazioni, ecc. vengono tracciate uua volta sola.

Ma nel caso di un anello di diga, essendo il carico più sfavorevole da considerare solo il carico massimo idrostatico, conviene ricorrere a metodi più speditivi.

Fra i tanti, mi pare il più pratico nella sua semplicità, quello indicato dagli ingegneri americani Turneaure e Maurer, nei loro « *Principles of Reinforced Concrete Construction* » (2ª ed. p. 335), e riportato nel noto trattato di G. A. Hool, « *Reinforced Concrete Construction* » (5ª ed. 1916, Vol. III p. 25).

È il metodo quasi universalmente adottato in America, e che trascrivo qui con qualche modifica.

Per esso si procede alla ricerca della spinta H_c, e del momento M_c, in chiave, considerando solo le deformazioni dovuti ai momenti flettenti.

Si tien conto poi separatamente della deformazione dovuta alla pressione normale e degli sforzi termici.

a) Momento flettente. — Se con M indichiamo il momento in un punto qualunque del semiarco di sinistra, — con la convenzione che M sia positivo se tende ad accrescere la compressione all'estradosso, — dovendo esser nulli la rotazione e lo spostamento orizzontale della sezione di chiave, a causa della simmetria, avremo:

$$\Sigma M y \frac{\Delta s}{EI} = 0$$

$$\Sigma M \frac{\Delta s}{EI} = 0$$

In esse il sommatorio va esteso ai cunei in cui è stato diviso il semiarco, ad ognuno dei quali compete una lunghezza Δs, un momento d'inerzia medio della sezione tra-

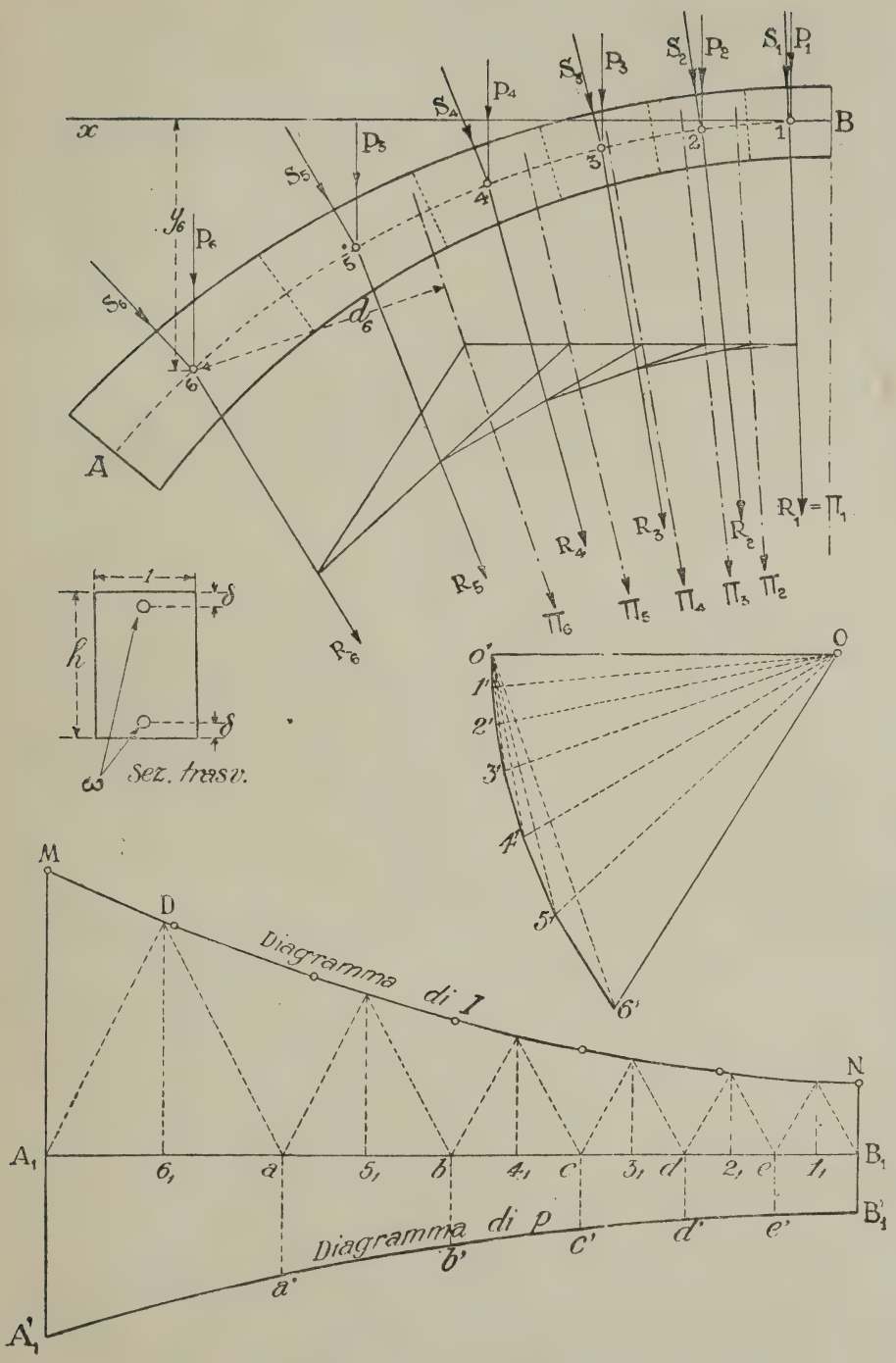

x
A
B
y_6
d_6
S_1 P_1
S_2 P_2
S_3 P_3
S_4 P_4
S_5 P_5
S_6 P_6
$R_1 = \Pi_1$
R_2 Π_2
R_3 Π_3
R_4 Π_4
R_5 Π_5
R_6 Π_6
h
δ
ω
Sez. trasv.
O
O'
1'
2'
3'
4'
5'
6'
M
D
N
Diagramma di I
A_1
B_1
A'_1
B'_1
Diagramma di p
a'
b'
c'
d'
e'

Fig. 5

sversale I, una distanza y fra il centro del cuneo e la retta parallela alla corda dell'arco, condotta per il centro della sezione di chiave (fig. 5). Quando l'arco è di cemento armato, E indica il modulo di elasticità del calcestruzzo.

Se dividiamo l'arco in cunei tali che per essi sia costante il rapporto $\frac{\Delta s}{I}$, le equazioni precedenti si scrivono, molto più semplicemente:

$$\Sigma My = 0$$
$$\Sigma M = 0$$

Essendo ora, come si è detto, M_c il momento ed H_c la spinta (positiva se genera compressione), nella sezione di chiave, si avrà:

$$M = M_c + H_c y - m \tag{20}$$

dove m è il momento delle sole forze esterne fra la chiave ed il giunto che si considera.

Sostituendo e risolvendo le equazioni rispetto H_c ed M_c si ha:

$$\left\{ \begin{aligned} H_c &= \frac{n\Sigma my - \Sigma y \Sigma m}{n\Sigma y^2 - (\Sigma y)^2} \\ M_c &= \frac{\Sigma m - H_c \Sigma y}{n} \end{aligned} \right. \tag{21}$$

essendo n il numero di cunei in cui si è diviso il semiarco, numero che conviene tenere fra 6 e 12, normalmente 8.

b) Variazione di temperatura. — Se la temperatura dell'arco aumenta di t^0, ed è α il coefficiente di dilatazione lineare, la corda l dell'arco ha tendenza ad aumentare di $\alpha t l$, mentre la sezione di chiave non subisce rotazione.

Quindi:

$$\Sigma My \frac{\Delta s}{EI} - \frac{\alpha t l}{2} = 0$$

$$\Sigma M \frac{\Delta s}{EI} = 0$$

Ma $\frac{\Delta s}{EI}$ è costante, e:

$$M = M'_c + H'_c y$$

se M'_c ed H'_c sono i valori di M_c ed H_c dovuti alla variazione di temperatura.

Quindi:

$$(22)\quad \begin{cases} H'_c = \dfrac{I}{\Delta s} \cdot \dfrac{n E \alpha t l}{2\,[n \Sigma y^2 - (\Sigma y)^2]} \\ M'_c = -\dfrac{\Sigma y}{n} H_c \end{cases}$$

Per un abbassamento di temperatura, t è negativo, ed H_c ed M_c cambiano quindi di senso.

c) Sforzo normale. — Per tener conto della deformazione prodotta dallo sforzo normale, consideriamo una compressione unitaria uniforme in tutto l'arco, di valore σ_c.

Si può senz'altro porre:

$$\sigma_c = \frac{H_c}{h_m}$$

dove H_c è la spinta in chiave già determinata tenendo conto solo della deformazione dovuta alla flessione, ed h_m è lo spessore medio dell'arco [1]).

Si ha allora una tendenza al raccorciamento $\frac{\sigma_c}{E} l$, che può essere considerata allo stesso modo di una diminuzione di temperatura, e conduce ai valori in chiave:

$$(23)\quad \begin{cases} H''_c = -\dfrac{I}{\Delta s} \cdot \dfrac{n \sigma_c l}{2\,[n \Sigma y^2 - (\Sigma y)^2]} \\ M''_c = -\dfrac{\Sigma y}{n} H_c \end{cases}$$

e per un punto qualsiasi:

$$M = M''_c + H''_c y$$

---

[1]) Con questo procedimento si trascura:

a) la disuniformità della compressione σ_c, che è però lieve, data la piccola deviazione della curva delle pressioni rispetto all'arco baricentrico e la leggera variazione degli spessori

b) l'ulteriore compressione prodotta dalla spinta H_c data dalla (23), che è però molto piccola rispetto alla spinta H_c dovuta al momento flettente.

Questo secondo errore può, volendo, eliminarsi ponendo $\sigma_c = \dfrac{H_c + H''_c}{h_m}$ nella prima delle (23) e risolvendo rispetto H''_c.

Nelle formule innanzi date non occorre tenere ulteriormente conto dei segni dei momenti e delle forze, perchè sono stati già considerati.

10. — Vediamo come, su questi principi, procede la verifica di stabilità di un arco che supporremo di cemento armato.

Si assegnano anzitutto, con criteri empirici, la forma dell'intradosso e lo spessore in chiave ed all'imposta.

Disegnato allora (fig. 5) il semiarco, si traccia l'asse AB, e si fissa l'armatura metallica, che per lo più è simmetrica.

Se h è lo spessore della volta, — supposta l'altra dimensione eguale all'unità, — ω è l'area della sezione metallica, eguale per l'estradosso e l'intradosso, e δ è la distanza del baricentro di essa dal bordo più vicino, si avrà

$$I = \frac{1}{12} h^3 + 10 \cdot \omega (h - 2\delta)$$

avendo assunto eguale a 10 il rapporto dei moduli di elasticità del ferro e del calcestruzzo.

Si segni ora sopra una retta $A_1 B_1$ lo sviluppo del semiarco baricentrico AB, e, diviso l' uno e l' altro in uno stesso numero di parti eguali, si misurino gli spessori h corrispondenti ai punti di divisione. (Questa costruzione è stata omessa per non ingombrare la figura).

Si calcolino ora i valori di I con l' aiuto del seguente specchietto:

h	$\frac{1}{12} h^3$	$h - 2\delta$	$10\omega(h - 2\delta)$	I

I valori di I si portino come ordinate su $A_1 B_1$, in modo da costruire per punti la curva MN.

Si voglia dividere l' arco AB in sei parti in modo che sia costante il valore di $\frac{\Delta s}{I}$. Scelto ad arbitrio il primo valore $A_1 a$ di Δs a partire da A_1, per il punto medio 6_1 di $A_1 a$ si conduca la verticale $6_1 D$, e si congiunga D con A_1 e con a. Partendo da a si conducano successivamente le rette parallele ad $A_1 D$ e Da, e così di seguito. I triangoli che risultano sono simili, ed hanno per base i segmenti $A_1 a$, ab, ecc. eguali a Δs, e per altezze segmenti che risultano eguali ad I. Sarà quindi costante per tutti il rapporto $\frac{\Delta s}{I}$.

Tre o quattro prove sono sufficienti a fare in modo che l'estremo del sesto triangolo cada proprio in B_1. Qualora il primo elemento verso l'imposta risultasse troppo grande, — come è proprio il caso della figura, — converrebbe suddividere l'arco in un maggior numero di parti.

Si riportino ora sull'arco AB i centri $1, 2, 3, \ldots$ corrispondenti a $1_1, 2_1, 3_1 \ldots$ di $A_1 B_1$, e le relative divisioni in cunei. In ognuno dei punti $1, 2, \ldots$ agirà una forza complessiva, risultante dalla componente $\gamma \cos \alpha h \Delta s$ del peso, (se α è l'inclinazione all'orizzonte delle generatrici della diga), e della spinta $p \Delta s$, (se p è la pressione unitaria in corrispondenza dei centri dei cunei).

Qualora la pressione non sia costante, si può costruire il diagramma delle p, inferiormente alla retta $A_1 B_1$; le pressioni $p \Delta s$ saranno date allora delle aree $A_1 a a' A'_1$; $abb'a'$; ecc. in cui il diagramma resta diviso dalle ordinate degli estremi dei cunei.

Similmente i pesi si otterranno moltiplicando le aree dei cunei per il fattore $\gamma \cos \alpha$.

Composti per ogni cuneo il peso P e la spinta S, — il primo agente normalmente alla corda, il secondo normalmente all'estradosso, — si traccia il poligono $o'6'$ delle forze complessive R agenti su ogni cuneo.

Connettendo dette forze con un poligono di polo arbitrario O si ottengono le successive risultanti parziali Π.

I bracci di leva d e le ordinate y si hanno conducendo dai centri dei cunei le normali alle Π e le normali all'asse Bx. In figura sono tracciate solo d_6 e y_6.

Con i valori delle Π, d ed y, ricavati dal grafico, si costruisce la seguente tabella:

Cunei	Π	d	$m = \Pi d$	y	y^2	my
1						
2						
3						
4						
5						
6						
	Sommatori:		Σm	Σy	Σy^2	Σmy

I valori delle Σ servono a calcolare rapidamente le H_c ed M_c, date dalle (21) (22) e (23), e quindi a tracciare le curve delle pressioni e determinare i valori degli sforzi unitari, con le ordinarie costruzioni.

11. — Per ciò che riguarda gli archi di cemento armato tutti i procedimenti di calcolo basati sulla teoria dell'elasticità non tengono conto, — e non si potrebbe facilmente —, del fatto che l'asse neutro della sezione relativo ai momenti flettenti non è baricentrico come nelle sezioni omogenee.

Tuttavia, poichè negli archi ben progettati la linea delle pressioni si sposta poco da quella baricentrica, si può ritenere che l'errore che si commette sia trascurabile.

Del resto numerose esperienze fatte negli archi di cemento armato, specie in America [1]), mostrano che i risultati della teoria elastica si accordano abbastauza bene con i fatti.

12. — Solidarietà degli anelli della volta. — Abbiamo accennato in principio ai metodi di calcolo, o meglio alle verifiche di stabilità, che tendono a considerare la solidarietà reciproca dei diversi anelli della volta.

---

[1]) Vedi M. H. Howe « Experimental Verification of Arch Formulas » Railroad Age Gazette, marzo 1909).

Tanto il calcolo prevalentemente grafico dato da H. Ritter (loc. citato), quanto quello prevalentemente analitico ideato dall' Ing. R. Shirreffs e sviluppato poi da C. L. Harrison ed S. P. Woodard (Trans. Am. Soc. C. E., Vol. 53 p. 155) [1], sono impostati sullo stesso principio.

Divisa cioè la volta con piani orizzontali in anelli e con piani radiali verticali in mensole incastrate alla base, si esprime che in ogni punto la deformazione come arco e quella come mensola debbano essere eguali.

Queste deformazioni si scrivono in funzione delle pressioni agenti : $\mu\, p$ ed $(1 - \mu)\, p$, considerando che la pressione idrostatica p debba essere per una parte $\mu\, p$ pensata gravante sull'arco, e per la rimanente parte $(1 - \mu)\, p$ pensata gravante sulla mensola.

La eguaglianza delle deformazioni fornisce una equazione atta a determinare il volore di μ.

Il calcolo, a rigore, dovrebbe eseguirsi per ogni punto di intersezione di un qualunque anello con una qualunque mensola, considerando ogni volta un diverso valore di μ.

Infatti le mensole estreme, attaccate ai lati rocciosi della gola (o ai contrafforti se si tratta di dighe multiple) non possono sensibilmente deformarsi. La effettiva distribuzione delle pressioni su ogni arco varia quindi da un massimo alle imposte, dove può ritenersi $\mu = 1$, fino ad un minimo alla chiave. Questa distribuzione è analoga a quella che si ha negli archi appartenenti a volte con generatrici inclinate (V. par. 6).

Similmente nelle mensole la pressione varia da un massimo al piede, dove $\mu = 1$, fino ad un minimo in cima.

Occorrerebbe dunque esprimere la deformazione degli archi e delle mensole dovute a queste distribuzioni variabili, in tutti gli mn punti di incontro degli m anelli con le n mensole. Ne risulterebbero $2mn$ espressioni, che, eguagliate a due a due, darebbero le mn equazioni necessarie a determinare gli mn valori di μ.

---

[1]) Vedi anche Morrison and Brodie « Masonry Dam Design » New-York 1916.

Ma in questo modo il procedimento si presenta troppo arduo.

Nei metodi proposti invece si determinano le deformazioni solamente per i punti di chiave dell' arco e per la mensola che ad essi corrisponde, ammettendo che la pressione μp sia costante su ogni arco; e per ognuno si calcola un valore unico di μ.

A parte che anche così semplificato il calcolo si presenta laboriosissimo (nel metodo americano diviene addirittura ineseguibile per la lungaggine e minuziosità con cui è condotto), il Guidi (op. cit.) ha mostrato che su di esso non si possa fare alcuno affidamento.

Intanto il metodo anzidetto è inammissibile se la diga, come spesso si verifica, non è simmetrica.

Ma anche quando questa condizione si verificasse, i metodi su citati potrebbero avere qualche valore sempre che lo spostamento del vertice dell'arco, — sul cui valore è basato tutto il calcolo della distribuzione delle pressioni — rimanesse pressochè lo stesso tanto quando la pressione avesse valore uniforme, che quando fosse crescente dalla chiave verso le imposte.

Ora il Guidi prova che lo spostamento del vertice di un arco è grandemente influenzato dalla legge di distribuzione della pressione, tanto che per una pressione crescente verso le imposte può assumere valori inferiori anche della metà a quello che si ha per una pressione costante.

Questi metodi quindi, mentre hanno l'apparenza di una grande precisione, in realtà sono profondamente inficiati nella loro ipotesi fondamentale.

D'altra parte il calcolo per elementi separati va a favore della stabilità, ciò che non guasta trattandosi di costruzioni di carattere molto delicato.

Un tale eccesso di stabilità sarebbe dannoso solo quando spostasse sensibilmente l'economia dell'opera ; è noto invece che, anche calcolate per elementi separati, le dighe ad arco risultano sempre di spessore esiguo, e sono quasi sempre notevolmente più economiche di quelle a gravità.

CAP. II.

Condizioni di massima economia nelle dighe ad arco.

1. — Anello di volta di volume minimo. — Le formule per il calcolo di un anello di diga, considerato come arco elastico, quando si trascurino le variazioni termiche, possono scriversi succintamente, tenendo presenti le (8) ed (8') del Cap. I:

$$\frac{\sigma}{p} = f\left(\frac{r}{h}, \varphi_0\right)$$

dove i simboli hanno i significati già espressi nel Cap. precedente.

Se si sceglie l'espressione che dà il massimo sforzo unitario σ (intradosso all'imposta), e si pone $\sigma_i = k$, essendo k il carico di sicurezza a compressione del materiale della volta, si avrà:

$$\frac{k}{p} = f\left(\frac{r}{h}, \varphi_0\right) \tag{1}$$

in cui il primo membro è una quantità nota.

Si ha quindi una relazione fra le due grandezze $\frac{r}{h}$ (rapporto del raggio medio allo spessore) e φ_0 (semiampiezza dell'arco), per modo che, fissata ad arbitrio una delle due, l'altra ne resti determinata.

Come in tutti i casi analoghi che si presentano nelle costruzioni, anzichè lasciare all'arbitrio del progettista la determinazione di una delle incognite, sarebbe preferibile dargli una guida per scegliere fra le infinite soluzioni quella che risulti economicamente più conveniente.

In particolare si può ricercare l'ampiezza $2\varphi_0$ a cui corrisponda il minimo volume di muratura per l'anello considerato.

Espresso perciò tale volume in funzione di φ_0, e tenendo le altre incognite come costanti, la equazione:

$$\frac{dV}{d\varphi_0} = 0$$

unitamente alla (1), e sotto la riserva che sia:

$$\frac{d^2 V}{d\varphi_0^2} > 0$$

fornirà la soluzione del problema.

Non ancora però che io sappia, una tale soluzione è stata data; alcuni tecnici hanno per vero emesse delle opinioni in proposito, ma esse sono basate su ipotesi non generalmente accettabili o sull' esame di casi troppo particolari.

Così l' affermazione che l' ampiezza più conveniente sia quella di 133°30, fatta la prima volta dall' Ing. L. R. Jorgensen [1]) ed accolta dall' Ing. Mc. Jntosh nelle sue norme *standard*, [2]) e poi adottata in numerosi casi, in America e fuori [3]), si basa sulla ipotesi della indeformabilità dell'arco e non può quindi essere accolta.

Nè è ammessibile in ogni caso l' ampiezza costante di 180°, da qualcuno [4]) propugnata sulla base di un calcolo di raffronto fra una diga con ampiezza 120° ed una con ampiezza 180°.

La difficoltà del problema, sta nella impossibilità di esprimere il volume dell'anello in funzione dell'ampiezza φ_0. Infatti, partendo dalle formule del Guidi, e ricordando che, a parte gli sforzi dovuti a variazioni di temperatura, il ca-

---

[1]) Transaction A. S. C. E. Vol. 78 pag. 690.

[2]) Engineering News-Record. 4 sett. 1919.

[3]) Vedi ad esempio L. Kambo, Annali del Consiglio Sup. delle Acque Vol. III, p. 36.

[4]) Ing. Bonetti. Politecnico, agosto 1920.

rico unitario massimo si ha all'intradosso presso l'imposta, si può scrivere:

$$k = p\left(\frac{r}{h} + \mu'_i\right)$$

dove μ'_i è una nota funzione di φ_0 e $\frac{r}{h}$, (V. Cap. I).

Questa relazione fondamentale lega i quattro parametri caratteristici, di cui due: coefficiente di sicurezza e pressione dell'acqua, sono dati; e due: rapporto $\frac{r}{h}$ e ampiezza $2\varphi_0$, sono incogniti.

Per maggiore esattezza converrà sostituire alla pressione unitaria idrostatica p riferita all'arco medio, quella effettiva p_e sull'estradosso.

Come è evidente:

$$p = p_e \frac{r + \frac{h}{2}}{r} = p_e\left(1 + \frac{1}{2\eta}\right)$$

avendo posto, come faremo d'ora innanzi:

$$\frac{r}{h} = \eta$$

Sostituendo si avrà:

$$\frac{k}{p_e} = \eta + \frac{1}{2} + \left(1 + \frac{1}{2\eta}\right)\mu'_i \tag{2}$$

dove, per le (7), (8'), (8'') del Cap. I,

$$\mu'_i = \frac{1}{\vartheta}\left[\frac{\operatorname{sen}\varphi_0}{\varphi_0} - \left(1 + \frac{1}{6\eta}\right)\cos\varphi_0\right] \tag{3}$$

ed a sua volta:

$$\vartheta = \cos\varphi_0 + \frac{\varphi_0}{\operatorname{sen}\varphi_0} - \frac{2\operatorname{sen}\varphi_0}{\varphi_0} + \frac{1}{6\eta^2}\left(\frac{2\varphi_0}{\operatorname{sen}\varphi_0} - \cos\varphi_0\right) \tag{4}$$

Quest' ultima eguaglianza si ottiene dalla (8'') del Cap. I, sostituendo per C_1 e C_2 le espressioni date dalle (7) dello stesso Cap. I.

Ora è evidente la impossibilità di ricavare per mezzo delle (2), (3), e (4) il valore di η in funzione di φ_0, per so-

stituirlo nella espressione del volume dell'anello di corda l:

$$V = \frac{\pi l^2}{360} \frac{\varphi_0}{\operatorname{sen}^2 \varphi_0} \cdot \frac{1}{\eta}$$

dove φ_0 è espresso in gradi.

Ne risulta quindi che finchè si adatteranno le funzioni (2), (3) e (4) il problema risulterà ribelle ad ogni procedimento analitico.

2. — Formule approssimate per il calcolo di un anello. — Poichè dunque le funzioni sopra scritte non si mostrano maneggevoli, può essere opportuno sostituirle con altre più semplici e sufficientemente approssimate per gli scopi pratici.

L'esame dei grafici disegnati dal Guidi, nella citata « *Statica delle dighe* », mi ha persuaso a porre senz'altro:

$$\frac{k}{p_e} = \eta + a \tag{5}$$

dove il valore di a è funzione dell'ampiezza φ_0 ed ulteriormente anche di η.

Infatti una semplice occhiata ai grafici stessi mostra quanto poco l'andamento della funzione $\frac{k}{p_e}$ si discosti da una linea retta inclinata a 45°, quando $2\varphi_0$ rimanga costante.

Allo scopo quindi di determinare i valori di a nel più largo ambito della pratica, ho calcolati per mezzo delle (2), (3) e (4) i valori di $\frac{k}{p_e}$ per diverse ampiezze e diversi valori di η, estendendo così i limiti della tabella già calcolata dal Guidi, fino a $2\varphi_0 = 120°$ e fino a $\eta = 60°$.

I risultati sono raccolti nelle prime tre colonne della Tab. IV a pag. 53.

Dall'esame della tabella risulta appunto, come già il grafico aveva mostrato, che il termine $a = \frac{k}{p_e} - \eta$ varia pochissimo con η.

Ora se consideriamo che il secondo membro della (5) è direttamente proporzionale al coefficiente di sicurezza k; che il valore di k per le diverse strutture non è mai fissato

TABELLA IV.

$2\varphi_0$	$\eta = \frac{r}{h}$	$\frac{k}{p_e}$	$\frac{p_e}{k}$	$\frac{V}{l^2}$	$\frac{V}{r^3}$	$\frac{V}{r_e^2}$
180°	5	7,70	0,1299	0,1571	0,6283	0,5193
	7,5	10,21	0,0979	0,1047	0,4188	0,3681
	10	12,71	0,0787	0,0785	0,3142	0,2850
	15	17,69	0,0565	0,0524	0,2095	0,1962
	20	22,68	0,0441	0,0393	0,1571	0,1495
	30	32,67	0,0306	0,0262	0,1046	0,1012
	40	42,66	0,0234	0,0196	0,0785	0,0766
	60	62,66	0,0160	0,0131	0,0525	0,0516
170°	5	8,03	0,1245	0,1495	0,5934	0,4904
	7,5	10,57	0,0946	0,0996	0,3955	0,3476
	10	13,07	0,0765	0,0748	0,2967	0,2691
	15	18,06	0,0554	0,0499	0,1979	0,1853
	20	23,05	0,0434	0,0373	0,1484	0,1412
	30	33,04	0,0303	0,0249	0,0988	0,0956
	40	43,03	0,0232	0,0187	0,0742	0,0724
	60	63,02	0,0159	0,0125	0,0496	0,0488
160°	5	8,41	0,1189	0,1440	0,5585	0,4616
	7,5	10,98	0,0911	0,0959	0,3722	0,3271
	10	13,50	0,0741	0,0720	0,2793	0,2534
	15	18,49	0,0541	0,0480	0,1863	0,1745
	20	23,49	0,0426	0,0360	0,1396	0,1329
	30	33,48	0,0299	0,0240	0,0930	0,0900
	40	43,47	0,0230	0,0180	0,0698	0,0681
	60	63,46	0,0158	0,0120	0,0466	0,0458
150°	5	8,85	0,1130	0,1403	0,5236	0,4328
	7,5	11,47	0,0872	0,0935	0,3490	0,3067
	10	14,00	0,0714	0,0702	0,2618	0,2375
	15	19,01	0,0526	0,0468	0,1746	0,1635
	20	24,01	0,0416	0,0351	0,1309	0,1246
	30	34,01	0,0294	0,0234	0,0872	0,0844
	40	44,00	0,0227	0,0175	0,0655	0,0639
	60	63,99	0,0156	0,0117	0,0437	0,0430
140°	5	9,35	0,1070	0,1384	0,4887	0,4039
	7,5	12,05	0,0830	0,0922	0,3257	0,2863
	10	14,61	0,0684	0,0692	0,2444	0,2217
	15	19,64	0,0509	0,0461	0,1630	0,1526
	20	24,65	0,0406	0,0346	0,1222	0,1163
	30	34,65	0,0289	0,0230	0,0814	0,0788
	40	44,64	0,0224	0,0173	0,0611	0,0596
	60	64,63	0,0155	0,0115	0,0408	0,0401
130°	5	9,90	0,1010	0,1381	0,4538	0,3751
	7,5	12,73	0,0786	0,0921	0,3024	0,2658
	10	15,34	0,0652	0,0691	0,2269	0,2058
	15	20,40	0,0490	0,0460	0,1513	0,1417
	20	25,43	0,0393	0,0345	0,1134	0,1079
	30	35,44	0,0282	0,0230	0,0756	0,0731
	40	45,44	0,0220	0,0173	0,0567	0,0553
	60	65,43	0,0153	0,0115	0,0379	0,0373
120°	5	10,52	0,0951	0,1396	0,4189	0,3462
	7,5	13,53	0,0739	0,0931	0,2792	0,2454
	10	16,23	0,0616	0,0698	0,2094	0,1899
	15	21,35	0,0468	0,0466	0,1397	0,1308
	20	26,41	0,0379	0,0349	0,1047	0,0997
	30	36,43	0,0274	0,0232	0,0697	0,0674
	40	46,44	0,0215	0,0175	0,0524	0,0511
	60	66,44	0,0151	0,0116	0,0350	0,0344

con numeri invariabili, e che un lieve spostamento di esso è senza influenza sul giudizio del grado di stabilità di una costruzione; appare evidentemente ammissibile la sostituzione del valore del termine a con uno che se ne scosti leggermente, purchè la differenza percentuale nei valori di k che ne risulta si mantenga in limiti ristretti.

Considerando allora i valori di $\frac{k}{p_e}$ calcolati nella Tab. IV come valori direttamente misurati di una funzione che si voglia rappresentare con la espressione (5), (in cui sia a costante per ciascuna ampiezza), si può per ogni valore di $2\varphi_0$ determinare il valore più opportuno di a per mezzo della teoria dei minimi quadrati.

Posto infatti eguale ad ε l'errore percentuale, avremo:

$$\varepsilon \frac{k}{p_e} = \frac{k}{p_e} - \eta - a$$

ossia:

$$\varepsilon = 1 - \frac{p_e}{k}\eta - \frac{p_e}{k}a$$

Perchè sia minimo $\Sigma\varepsilon^2$, dovrà aversi:

$$\frac{d\Sigma\varepsilon^2}{da} = -2\sum\left(1 - \frac{p_e}{k}\eta - \frac{p_e}{k}a\right)\frac{p_e}{k} = 0$$

cioè:

$$a = \frac{\sum\frac{p_e}{k} - \sum\eta\left(\frac{p_e}{k}\right)^2}{\sum\left(\frac{p_e}{k}\right)^2}$$

I sommatori si intendono estesi ai diversi valori di η e $\frac{p_e}{k}$ direttamente determinati per una stessa ampiezza $2\varphi_0$.

I risultati del calcolo sono riassunti nella Tabella seguente, in cui, nella terza linea, sono riportati i massimi errori percentuali a cui si va incontro con l'uso della (5).

TABELLA V.

$2\varphi_0$	180°	170°	160°	150°	140°	130°	120°
a	2,69	3,05	3,44	3,91	4,45	5,07	5,80
errore massimo	0,20 %	0,25 %	0,45 %	0,67 %	1,10 %	1,70 %	2,50 %

Gli errori sono trascurabili per grandi ampiezze, e crescono al diminuire di essa.

Per il carattere del problema, mi pare che la (5) sia applicabile per archi la cui ampiezza non sia inferiore a 120°, cioè nella maggior parte dei casi pratici.

La differenza percentuale del valore di k non supererebbe in tal caso il 2,5 % e sarebbe perciò perfettamente accettabile.

La Tab. V. mostra che il termine a è approssimativamente in rapporto di proporzione inversa con l'ampiezza $2\varphi_0$.

Conviene porre quindi:

$$a = \frac{b}{\varphi_0} + c$$

e per conseguenza:

$$\frac{k}{p_e} = \eta + \frac{b}{\varphi_0} + c$$

con b e c costanti.

L'errore percentuale ε sarà ora dato da:

$$\varepsilon \frac{k}{p_e} = \frac{k}{p_e} - \eta - \frac{b}{\varphi_0} - c$$

E ponendo

$$\frac{\partial \Sigma \varepsilon^2}{\partial b} = 0 \qquad \frac{\partial \Sigma \varepsilon^2}{\partial c} = 0$$

si ricava il sistema lineare:

$$\begin{cases} \sum \frac{p_e}{k} \frac{1}{\varphi_0} - \sum \left(\frac{p_e}{k}\right)^2 \frac{\eta}{\varphi_0} - b \sum \left(\frac{p_e}{k} \frac{1}{\varphi_0}\right)^2 - c \sum \left(\frac{p_e}{k}\right)^2 \frac{1}{\varphi_0} = 0 \\ \sum \frac{p_e}{k} - \sum \left(\frac{p_e}{k}\right)^2 \eta - b \sum \left(\frac{p_e}{k}\right)^2 \frac{1}{\varphi_0} - c \sum \left(\frac{p_e}{k}\right)^2 = 0 \end{cases}$$

da cui si ottengono i valori di b e c, badando che i som-

matori devono estendersi a tutti i valori racchiusi nella Tabella IV.

Il calcolo, lungo ma semplicissimo, dà:

$$\frac{k}{p_e} = \eta + \frac{563{,}69}{\varphi_0} - 3{,}60 \tag{6}$$

dove φ_0 è espresso in gradi sessagesimali.

Se φ_0 si esprime in archi, allora:

$$\frac{k}{p_e} = \eta + \frac{9.833}{\varphi_0} - 3{,}60 \tag{6'}$$

L'errore percentuale rimane sempre inferiore al 2 %, salvo che per $2\varphi_0 = 120^0$, pel quale valore giunge fino al 2,52 %.

La (6) è quindi adottabile per ampiezze non inferiori a 120^0, nei limiti pratici fissati innanzi.

È notevole anzi che per $2\varphi_0 > 133^0$ (valor limite al di sotto del quale, come si vedrà in seguito, non è conveniente spingersi) tanto la (5) che la (6) danno errori inferiori all' 1,5 %.

La formula (5) può servire tutte le volte che è prefissato il valore di $2\varphi_0$; la formula (6) nel caso che $2\varphi_0$ sia variabile o comunque non fissato.

3. — Infuenza della deformabilità dell'anello. — Le formule precedenti tengono conto della elasticità dell'arco; qualora invece si voglia considerare l' arco indeformabile, si ha come è noto:

$$p\,r = k\,h'$$

e quindi:

$$p_e\left(1 + \frac{1}{2\eta'}\right) r = k\,h'$$

da cui:

$$\frac{k}{p_e} = \eta' + \frac{1}{2} \tag{7}$$

essendo h' ed η' i valori corrispondenti all'arco rigido.

Paragonando la (7) con (5) e (6) risulta che il termine:

$$a - \frac{1}{2} = \frac{563{,}69}{\varphi_0} - 4{,}10$$

rappresenta nelle (5) e (6) l'influenza della deformazione

Dalla (7) ricaviamo:

$$h' = \frac{r}{\frac{k}{p_e} - \frac{1}{2}}$$

mentre dalla (5):

$$h = \frac{r}{\frac{k}{p_e} - a}$$

e quindi:

$$\frac{h}{h'} = \frac{\frac{k}{p_e} - \frac{1}{2}}{\frac{k}{p_e} - a}$$

Di quì consegue, — se si tengono presenti i valori di a, — che h è tanto maggiore di h', quanto minore è l'ampiezza; e che, per una data ampiezza, h è tanto maggiore di h' quanto minore è il valore di $\frac{k}{p_e}$, cioè quanto minore è il carico di sicurezza e quanto maggiore la pressione e conseguentemente la profondità.

In altri termini più l'anello è profondo sotto il pelo d'acqua e più l'influsso della deformazione elastica è sensibile; più grande è l'angolo di ampiezza, minore diventa l'influsso della deformazione.

Il primo risultato è particolarmente importante, in quanto un ragionamento intuitivo, in cui è facile cadere [1]), lascerebbe supporre che gli archi molto profondi, e quindi più spessi, si potessero ritenere pressochè indeformabili.

Per un arco di ampiezza, ad es. di 150°, in calcestruzzo di cemento, per cui si ritenga $k = 300$ Tonn./mq., e situato alla profondità di m. 15, si avrà:

$$h = \frac{20 - \frac{1}{2}}{20 - 3{,}91} h' = 1{,}21\ h'$$

cioè oltre un quinto in più sullo spessore; e se lo stesso

[1]) Vedi L. Kambo — Annali del Cons. Sup. delle Acque. Vol. III p. 36.

arco si trovasse alla profondità di m. 50 sarà invece:

$$h = \frac{6 - \frac{1}{2}}{6 - 3{,}91} h' = 2{,}74\, h'$$

con uno spessore quasi triplo del corrispondente arco indeformabile!

4. — Profilo teorico delle dighe a corda costante. — Se una diga ha la corda e l'ampiezza costanti con la profondità, (cosa che avviene normalmente per le dighe ad archi multipli), la (5) porge una costruzione molto semplice del profilo teorico della sezione trasversale.

Consideriamo separatamente il caso in cui si voglia tenere verticale il paramento a monte della diga, e quello in cui si voglia tenere costante il raggio medio.

Nel primo caso sarà costante il raggio di estradosso:

$$r_e = r + \frac{h}{2}$$

Se p_e è espresso in Tonn. per mq., essendo 1 T/mc. il peso specifico dell'acqua, p_e si identifica con la profondità x dell'anello, sotto il pelo d'acqua. Si ha quindi:

$$\frac{k}{x} = \frac{r}{h} + a$$

da cui:

$$h = \frac{r_e x}{k - a'x} \tag{8}$$

dove si è posto $a' = a - \frac{1}{2}$.

La (8) ci mostra che il profilo del paramento a valle, nella sezione trasversale, è un arco di iperbole equilatera i cui asintoti sono: uno verticale distante $\frac{r_e}{a'}$ dal paramento a monte; ed uno orizzontale distante $\frac{k}{a'}$ dal pelo d'acqua.

Portando da V (fig. 6) il segmento VB eguale all'altezza A della diga si ha in BK lo spessore in base.

Il corpo della diga è rappresentato dall'area tratteggiata VBK; il paramento VK è tangente in V ad una retta inclinata alla verticale di un angolo α tale che:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{r_e}{k}$$

Se la diga si vuole invece costruire col raggio medio costante, in modo che le linee di paramento in una sezione trasversale risultino simmetriche rispetto la verticale baricentrica, trascurando l'effetto della componente verticale della pressione idrostatica, si ha similmente:

$$(9) \quad \frac{h}{2} = \frac{\frac{1}{2} rx}{k - ax}$$

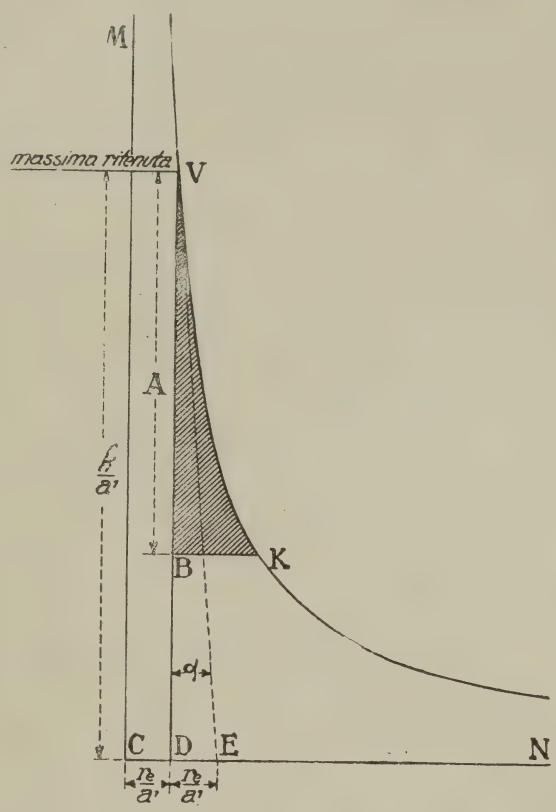


Fig. 6

analogamente alla (8), dove al posto di a' si ponga a, ed al posto di r_e, r.

La sezione della diga è limitata da due archi di iperbole appartenenti ad iperboli equilatere simmetriche rispetto la verticale baricentrica VD (fig. 7), ed aventi in comune l'asintoto orizzontale, distante $\frac{k}{a}$ dalla orizzontale per il vertice, mentre gli asintoti verticali distano $\pm \frac{r}{2a}$ dalla verticale baricentrica.

Se A è l'altezza della diga, l'area tratteggiata VKK_1 rap-

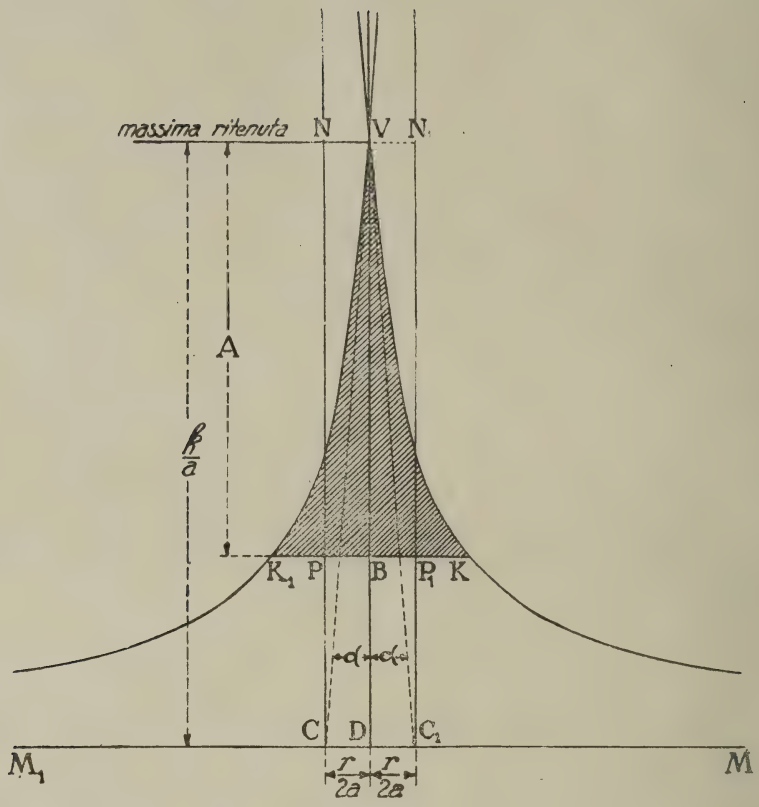


Fig. 7

presenta la sezione trasversale, e l'angolo 2α fra i paramenti al vertice è dato da:

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{r}{h}$$

In questo caso è facile determinare anche il volume di tutta la diga. Esso è infatti:

$$W = S \cdot \frac{\pi}{90} \varphi_0 r$$

dove φ_0 è espresso in gradi, e dove S è l'area VKK_1 della sezione trasversale.

Ma evidentemente:

$$S = 2 \times \text{area } NVKP - \text{rettang. } NN_1 P_1 P$$

e poichè l' area $NVKP$ è racchiusa fra l'iperbole, il suo asintoto e le due ordinate $\frac{k}{a}$ e $\frac{k}{a} - A$, si ha con facili calcoli:

$$\text{area } NVKP = \frac{rk}{2a^2} \log \frac{k}{k - Aa}$$

$$\text{rettang. } NN_1 P_1 P = \frac{Ar}{a}$$

e poi:

$$W = \frac{\pi}{90} \left[\frac{k}{2a} \log \frac{k}{k - Aa} - A \right] \frac{r^2 \varphi_0}{a}$$

Questi profili teorici debbono completarsi, col dare in sommità alla diga uno spessore pratico s, ed una maggiore altezza sul livello di massimo invaso, o franco f.

L'andamento iperbolico della linea di paramento avrà inizio allora ad una profondità sotto il pelo d'acqua:

$$x = \frac{ks}{r_e + a's}$$

se la diga è a paramento a monte verticale; e:

$$x = \frac{ks}{r + as}$$

se la diga è a profilo simmetrico.

Nel caso di dighe a generatrici inclinate, come si usa nelle dighe ad archi multipli, se si divide la diga in elementi mediante piani normali alle generatrici, e si trascura la disuniformità della pressione e l'effetto della componente del peso proprio dell'anello, si possono adottare profili che si ricavano dai precedenti con una affinità piana; inclinando cioè l'asse VD e gli asintoti verticali delle iperboli fino a renderli paralleli alle generatrici della volta.

5. — Spessore in sommità. — Lo spessore in sommità in una diga va calcolato tenendo conto degli sforzi dovuti al moto ondoso ed alla dilatazione dei campi di ghiaccio.

L'azione delle onde si esplica tanto come effetto idrostatico per l'innalzarsi del livello, quanto per l'effetto dina-

mico dell'urto delle molecole i cui moti orizzontali si spengono contro la faccia a monte della diga.

Tuttavia si suole tener conto del moto ondoso come una semplice sopraelevazione del pelo d'acqua.

L'azione del ghiaccio si verifica quando esso si forma a bassa temperatura, e per un successivo aumento di questa la massa ghiacciata si espande. Questa azione sembra molto più considerevole di quella prodotta dall'urto dei ghiacci natanti.

In alcune dighe americane sono stati ritenuti i valori seguenti:

Diga	Cross River	Kg.	36000	per	ml.
»	Quaker Bridge	»	62500	»	»
»	Croton Falls	»	45000	»	»
»	Olive Bridge	»	70000	»	»

Questi valori sembrano tuttavia eccessivi, specie se lo spessore del ghiaccio è sottile.

In una discussione seguita su questo soggetto all'Associazione degli Ingegneri civili del Canadà nel dicembre 1891, si stabilì che per meno di 3 pollici di spessore fosse da trascurare lo sforzo dovuto alla dilatazione, e che per maggiori spessori bastasse porsi al limite di rottura del ghiaccio.

Più tardi l'Ing. C. L. Harrison [1]) ritenne che la pressione del giaccio fosse da trascurarsi:

a) quando il serbatoio ha sponde molto inclinate ed il banco di ghiaccio non supera 6 pollici.

b) quando il serbatoio si riempie durante la stagione delle piogge, e si vuota subito dopo rapidamente;

c) quando il serbatoio ha in inverno un livello d'acqua tanto più basso del massimo invaso da investire la diga in un punto dove è capace di resistere a pressioni elevate;

d) quando la forma del bacino a livello della piena è tale da impedire che la forza di espansione del ghiaccio raggiunga la diga.

Oggi si tende a studiare il problema dal punto di vista della reazione al contorno di una lastra piana assoggettata a dilatazioni termiche.

---

[1]) Transaction A. S. C. E. Vol. LXXV p. 219.

Il Prof. Albenga [1]), ricercando lo sforzo massimo al contorno di una lastra piana, compatibile con la sua resistenza, giunge, per una lastra di ghiaccio di forma quadrata, alla espressione:

$$p = \frac{47500}{\varepsilon^2}$$

e per quella rettangola:

$$p = \frac{47500}{\varepsilon^2} \cdot \frac{\lambda^2 + 1}{2\lambda^2}$$

dove p è la pressione per unità di superficie esercitata dalla lastra di ghiaccio sulla diga, misurata in $^{kg}/_{cmq}$, ε è il rapporto fra la larghezza e lo spessore del campo di ghiaccio, λ è il rapporto fra la lunghezza e la larghezza del campo stesso.

Queste formule, pur non potendo tener conto di tutti gli elementi del complesso fenomeno, possono tuttavia dare delle utili indicazioni.

Per quanto riguarda le opere che si progettano in Italia le Norme dettate dalla Commissione Ministeriale dispongono che, per dighe poste ad altitudine superiore agli 800 ÷ 1000 metri, si consideri una spinta in superficie dovuta all'espansione dei campi di ghiaccio, da graduarsi dalle 5 alle 25 tonnellate per metro lineare, corrispondentemente a spessori di ghiaccio da cm. 30 ad oltre un metro; ammettono tuttavia che non si tenga conto di tale spinta in circostanze particolari (dispositivi speciali, debole pendenza delle sponde, ecc.).

Un fattore, mai finora, che io sappia, tenuto presente nel suo giusto valore, e che ha forse una rilevante importanza nel ridurre gli effetti dell' espansione del ghiaccio, è la nota proprietà di questo corpo, per cui il suo punto di fusione si abbassa al crescere della pressione.

Per tal fatto, a misura che la pressione del ghiaccio sulle pareti della diga cresce, gli strati a contatto con la diga tendono a fondersi. È noto in proposito il famoso esperimento del filo a cui sono attaccati dei pesi, il quale attra-

---

[1]) Annali del Cons. Sup. delle Acque. Vol. III Fascicolo I.

versa un blocco di ghiaccio senza spezzarlo; ed è noto pure il carattere di plasticità che il ghiaccio possiede.

Comunque gli spessori adottati in pratica per gli anelli in sommità nelle dighe ad arco finora costruite, salvo casi eccezionali, sono di circa m. 0,30 ÷ 0,50 per dighe ad archi multipli di cemento armato; di circa 0,60 ÷ 0,80 per dighe simili di muratura; di circa m. 0,90 ÷ 1,30 per dighe ad arco semplice di corda non eccessiva, e per dighe ad archi di carattere eccezionale si giunge fino a 2 ÷ 3 metri di spessore in cima.

L'argomento tuttavia merita di essere trattato più a fondo, e sulla scorta di una più ampia raccolta di dati.

6. - Calcolo di un anello di volta di minimo volume. — La formula approssimata (6) permette lo studio della condizione di massima economia in un anello di diga di determinata corda.

Sia V il volume dell'anello, che abbia altezza eguale ad uno, spessore medio h, corda l, misurata sull'arco baricentrico di sviluppo s, raggio r ed ampiezza $2\varphi_0$.

$$V = s\,h$$

e poichè:

$$\frac{s}{2r} = \varphi_0 \qquad l = 2\,r \operatorname{sen} \varphi_0$$

dove φ_0 è in archi, si ha:

$$V = 2\,r\,\varphi_0\,h = 2\,r^2\,\varphi_0\,\frac{1}{\eta} = \frac{\varphi_0}{\operatorname{sen}^2\varphi_0} \cdot \frac{l^2}{2\eta}$$

Se l'arco fosse indeformabile:

$$\frac{1}{\eta} = \frac{p_e}{k}$$

e quindi

$$V = \frac{l^2 p_e}{2\,k} \cdot \frac{\varphi_0}{\operatorname{sen}^2\varphi_0}$$

Il valore di φ_0 che rende minimo V, annullerà la derivata:

$$\frac{d}{d\varphi_0}\left(\frac{\varphi_0}{\operatorname{sen}^2\varphi_0}\right) = 0$$

per cui, essendo sen $\varphi_0 \neq 0$, si ha:

$$\operatorname{tg} \varphi_0 = 2 \varphi_0$$

d' onde:

$$2 \varphi_0 = 133^\circ 34'$$

che corrisponde all' arco ribassato di circa $\frac{1}{3}$ [1]).

Ma tenendo conto della deformazione dell'arco, ed applicando la (6), che per essere φ_0 misurato in archi si scrive:

$$\frac{k}{p_e} = \frac{r}{h} + \frac{9{,}833}{\varphi_0} - 3{,}60$$

si ottiene:

$$V = \frac{l^2}{2} \frac{1}{\left(\frac{k}{p_e} - \frac{9{,}833}{\varphi_0} + 3{,}60\right) \frac{\operatorname{sen}^2 \varphi_0}{\varphi_0}}$$

Perchè V sia minimo, occorre che sia massimo:

$$\left(\frac{k}{p_e} - \frac{9.833}{\varphi_0} + 3{,}60\right) \frac{\operatorname{sen}^2 \varphi_0}{\varphi_0}$$

cioè, derivando:

$$\left(\frac{k}{p_e} - \frac{9{,}833}{\varphi_0} + 3{,}60\right) \frac{2 \varphi_0 \operatorname{sen} \varphi_0 \cos \varphi_0 - \operatorname{sen}^2 \varphi_0}{\varphi_0^2} +$$

$$+ \frac{9{,}833 \operatorname{sen}^2 \varphi_0}{\varphi_0^3} = 0$$

da cui:

(10) $$\frac{k}{p_e} = 2 \cdot 9{,}833 \frac{\varphi_0 - \operatorname{tg} \varphi_0}{(2 \varphi_0 - \operatorname{tg} \varphi_0) \varphi_0} - 3{,}60$$

dove φ_0 è sempre espresso in archi.

Per mezzo della (10), per ogni valore di $\frac{k}{p_e}$ si può determinare il valore di φ_0 a cui corrisponde il minimo volume dell' anello.

Il risultato del calcolo per φ_0 variabile di grado in grado, è riportato nella Tab. VI a pag. 66, unitamente ai valori corrispondenti di $\frac{r}{h}$, calcolati per mezzo della (6), ed ai valori di $\frac{l}{h}$ e di $\frac{V}{l^2}$.

---

[1]) Vedi note a pag. 50.

TABELLA VI.

$\frac{k}{p_e}$	$2\,\varphi_0$	$\frac{r}{h}$	$\frac{l}{h}$	$\frac{V}{l^2}$
minore di 8,92	180°	$\frac{k}{p_e} - 2{,}69$	$2\,\frac{r}{h}\,\text{sen}\,\varphi_0$	$\frac{\varphi_0}{2\,\text{sen}^2\varphi_0}\cdot\frac{h}{r}$
8,92	180°	6,23	12,52	0,12546
9,42	178°	6,69	13,38	0,11614
9,97	176°	7,17	14,33	0,10724
10,58	174°	7,70	15,38	0,09888
11,24	172°	8,29	16,54	0,09097
11,98	170°	8,95	17,83	0,08351
12,80	168°	9,69	19,27	0,07649
13,72	166°	10,53	20,92	0,06983
14,76	164°	11,49	22,76	0,06351
15,95	162°	12,60	24,89	0,05750
17,32	160°	13,87	27,32	0,05190
18,90	158°	15,37	30,17	0,04655
20,77	156°	17,15	33,55	0,04149
23,00	154°	19,28	37,57	0,03671
25,71	152°	21,90	42,50	0,03217
29,08	150°	25,16	48,60	0,02788
33,37	148°	29,36	56,45	0,02380
39,05	146°	34,93	66,81	0,01994
46,88	144°	42,66	81,15	0,01628
58,45	142°	54,12	102,34	0,01281
77,17	140°	72,72	136,67	0,00951
112,83	138°	108,27	202,16	0,00638
206,66	136°	201,97	374,53	0,00342
1163,09	134°	1158,28	2132,39	0,00060
∞	133°34′	∞	∞	0

La tabella permette il calcolo rapidissimo di un anello, con la condizione che il suo volume sia un minimo.

Basta infatti entrare in essa col valore noto di $\frac{k}{p_e}$ per ricavare immediatamente il valore più conveniente dell'ampiezza, ed il corrispondente spessore e volume dell'anello.

Per valori intermedi è agevole una interpolazione.

Dall'esame della tabella e del grafico relativo (curva a tratto continuo della fig. 8) si rileva che solo per valori

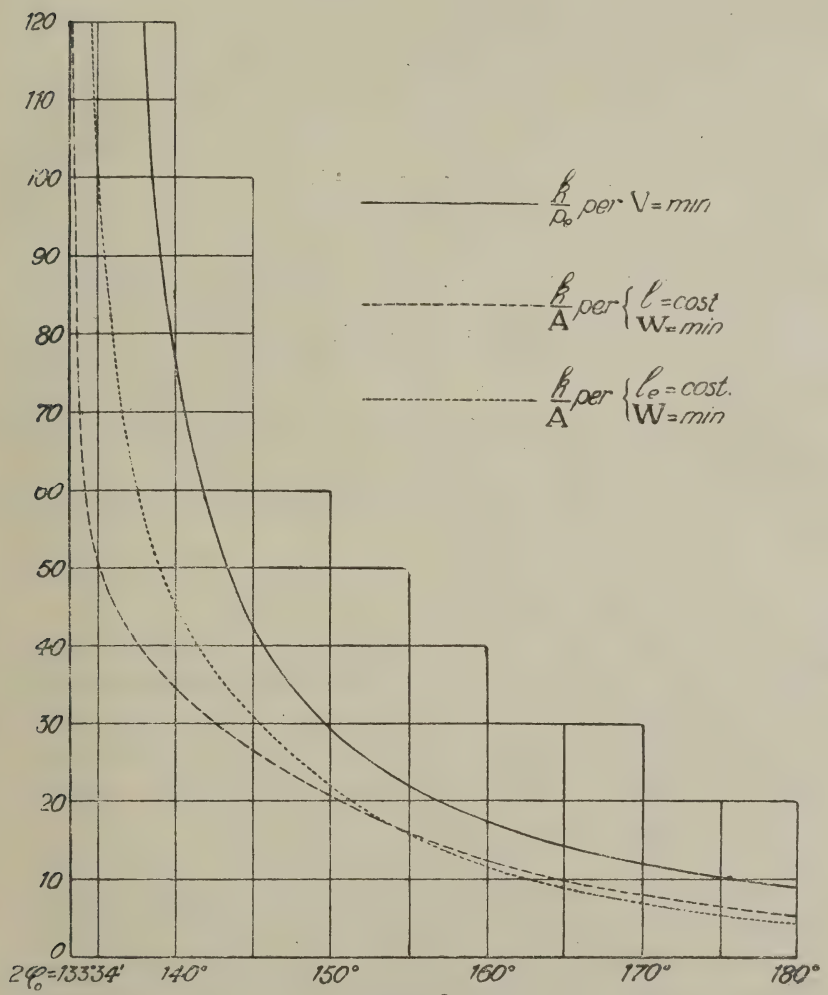


Fig. 8

di $\frac{k}{p_e}$ molto grandi, e quindi per profondità molto piccole conviene una ampiezza che si avvicina asintoticamente al valore di 133°34′, già determinata per l'arco indeformabile. Col crescere della profondità conviene aumentare l'ampiezza, fino ad adottare l'arco a pieno centro se $\frac{k}{p_e} \geqq 8{,}92$.

Se x indica la profondità dell'anello sotto il pelo d'acqua, ritenuta questa di peso specifico = 1 Tonn. per mc., il limite di profondità al di là del quale conviene sempre l'arco a pieno centro, è per diversi valori di k:

$$x = 0{,}112\, k$$

e se k si esprime in kg. per cm², mentre x è in metri:

$$x = 1{,}12\, k \doteq \sim k$$

cioè: *la profondità in metri al di là della quale conviene sempre l'ampiezza di 180° è grossolanamente espressa dallo stesso numero che misura in kg. per cmq. il carico di sicurezza del materiale.*

Questa norma pratica è utile per la facilità con cui si può tenere a memoria.

La equazione (10) può con approssimazione grandissima essere sostituita dalla:

$$\left(\frac{k}{p_e} + 2{,}28\right)\left(\varphi_0 - 66{,}77\right) = 259{,}5 \tag{11}$$

suggerita dalla forma iperbolica della curva (10), e ricavata col procedimento già più volte seguito.

La (11) ha il vantaggio di essere non solo di molto più agevole maneggio, ma di permettere il calcolo diretto di φ_0 per un dato valore di $\frac{k}{p_e}$.

In essa le ampiezze $2\varphi_0$ sono espresse in gradi sessagesimali, per facilitare i calcoli.

La esattezza della (11) è tale che i valori da essa desunti, non differiscono, anche nei casi più eccezionali, per più di 3 minuti primi dai valori dati dalla (10).

Il problema quindi dell'arco elementare di minima spesa può dirsi praticamente risoluto con le formule (6) e (11), unitamente alle:

$$(12) \qquad \begin{cases} r = \dfrac{l}{2 \operatorname{sen} \varphi_0} \\ h = \dfrac{l}{2 \eta \operatorname{sen} \varphi_0} \\ V = \dfrac{0{,}01745\, \varphi_0}{2 \eta \operatorname{sen}^2 \varphi_0}\, l^2 \end{cases}$$

in cui φ_0 è sempre in gradi sessagesimali, e che servono a fissare i valori del raggio, dello spessore e del volume in funzione della corda l assegnata.

7. — Se ad esempio si ha da calcolare un anello di diga, alla profondità di m. 15 e di ampiezza $2\varphi_0 = 150^0$, (esempio numerico riportato dal Guidi - op. cit.); assumendo come carico di sicurezza:

$$\sigma'_i = k = 247 \text{ Tonn./mq.}$$

— cioè lo stesso valore a cui il Guidi giunge come calcolo di verifica quando si assuma $\frac{r}{h} = 12{,}50$, — si troverà per mezzo della (6):

$$\frac{r}{k} = 12{,}55$$

con una differenza inferiore al 0,5 % sul valore esatto, e col vantaggio grandissimo della possibilità del calcolo diretto delle dimensioni.

Se la corda è di m. 20, il volume dell'anello sarà:

$$V = \frac{20^2 \times 0{,}01745 \times 75}{2 \times 12{,}50 \times \overline{0\,966}^2} = \text{mc. } 22{,}449$$

e lo spessore:

$$h = \frac{20}{2 \times 12{,}50 \times 0{,}966} = \text{m. } 0{,}83$$

Se, invece di fissare a priori il valore di $2\varphi_0$, lo si determina con la (11), si avrà:

$$2\,\varphi_0 = \frac{2 \times 259{,}5}{\frac{247}{15} + 2{,}28} + 2 \times 66{,}77 = 161^0.2$$

e poi:

$$\eta = \frac{247}{15} - \frac{563{,}69}{161{,}2} + 3{,}60 = 13{,}07$$

$$h = \frac{20}{2 \times 13{,}07 \times 0{,}966} = 0{,}78 \text{ m.}$$

$$V = \frac{20^2 \times 0{,}01745 \times 80{,}6}{2 \times 13{,}07 \times \overline{0{,}986}^2} = \text{mc. } 22{,}121$$

La differenza lieve del volume (poco più dell' 1 %) mostra l' intuito con cui era stata dal Guidi fissata l' ampiezza di 150°, e d' altra parte riconferma che una variazione di questa anche di alcuni gradi non sposta in modo sensibile l'economia dell' opera.

Ciò però non distrugge la opportunità del calcolo diretto di minima spesa. Se, infatti, con minore accorgimento, si fosse posto $2\,\varphi_0 = 140^0$ si sarebbe avuto:

$$V = \text{mc. } 23{,}02$$

con circa il 5 % di maggior volume; o, con $2\,\varphi_0 = 120^0$:

$$V = \text{mc. } 26{,}147$$

con circa il 10 % di maggior volume.

Le differenze percentuali di volume non sono come si vede eccessivamente forti anche per variazioni notevoli della ampiezza $2\,\varphi_0$; occorre però riflettere che esse diventano tanto più grandi quanto maggiore è la profondità.

Infatti, se supponiamo, nell'esempio precedente, che la profondità sia di 25 m., e quindi:

$$\frac{k}{p_e} = \frac{247}{25} = 9{,}88$$

con calcoli semplicissimi troviamo:

$$\text{per } 2\varphi_0 = 150^0 \qquad V = 47{,}05$$
$$2\varphi_0 = 161^0{,}2 \qquad V = 44{,}62$$
$$2\varphi_0 = 140^0 \qquad V = 50{,}96$$

e le differenze che nell'esempio precedente erano dell' 1 e del 5 %, qui diventano rispettivamente del 5,5 e dell' 8,5 %, ed ancora più forti diventano se le rapportiamo all' arco di minor volume.

Per la (11) si ha:

$$2\varphi_0 = 176^0 \text{ circa}$$

per cui:

$$V = 43{,}44$$

Mentre se all' opposto ci scostiamo ancora di più dall' ampiezza più conveniente avremo:

$$\text{per } 2\varphi_0 = 120^0 \qquad V = 68{,}25$$

Le differenze di volume, rispetto al volume minimo, corrispondente a $2\varphi_0 = 176^0$, lievi per spostamenti di $10 \div 20$ gradi crescono rapidamente, fino ad essere del 16 % se $2\varphi_0 = 140^0$ e del 58 % se $2\varphi_0 = 120^0$!

8. — Diga a volta di volume totale minimo. — La soluzione data per la condizione di massima economia di un elemento di diga, non risolve il quesito della economia di tutta la costruzione.

Poichè, invero, l'ampiezza più conveniente varia con la profondità dell' anello, è chiaro che per l' insieme di tutti gli anelli componenti una diga il problema va considerato nel suo complesso, e non può risolversi con l' applicazione successiva dei criteri già fissati per ogni elemento singolo.

Ne risulterebbe, infatti, una diga di particolare forma quasi sempre non realizzabile praticamente, dovendosi avere gli anelli di ampiezza variabile e precisamente crescente verso il fondo della valle.

I paramenti di una tale diga risulterebbero costituiti da superficie gobbe di difficile tracciamento ed inoltre gli estradossi degli anelli inferiori andrebbero, verso le imposte, avanzando rispetto a quelli degli anelli superiori, creandosi così degli strapiombi inammessibili.

Nel caso di una vallata sbarrata da un unico arco, diventa già impossibile non dico aumentare, ma mantenere costante l'ampiezza degli elementi, a causa del restringersi della valle verso il thalweg; e se qualche volta una simile struttura è stata realizzata [1]) ciò si è potuto fare con ampiezze molto inferiori a quelle corrispondenti ai minimi di volume, e costituisce in ogni caso una forma eccezionale.

Tuttavia dei progressi in questo senso possono farsi, specie con la maggiore libertà di adattamenti che permette il cemento armato.

Messo da parte il caso della diga formata dalla sovrapposizione di elementi di minimo volume, le dighe che si presentano nella pratica sono caratterizzate dalla costanza del valore del raggio per tutta l'altezza; e più precisamente: del raggio medio se la diga si costruisce con sezione trasversale a linee di paramento simmetriche; del raggio di estradosso se si costruisce con paramento a monte verticale.

Occorre però distinguere le dighe in cui la corda di tutti gli anelli è costante, (dighe sbarranti corridoi rocciosi a pareti presso che verticali, e dighe ad archi multipli) da quelle in cui la corda diminuisce col crescere della profondità a causa del restringersi della gola verso il basso.

9. — Volumi elementari in dighe a corda costante. — Consideriamo anzitutto le dighe a corda costante.

In esse, assieme alla corda restano invariabili per tutta l'altezza il raggio (medio o di estradosso) e l'ampiezza $2\varphi_0$.

Se W è allora il volume della diga, mentre V è quello di un anello di altezza unitaria:

$$W = \int_0^A V dx$$

[1]) Le dighe di Salmon Creeck nell'Alaska e di Lake Spaulding in California sono state eseguite con una serie di anelli sovrapposti tutti di ampiezza di 120°. Sono opera di Jorgensen che, come si è visto, patrocinò per il primo l'angolo di 133°, o anche di 120°, come il più conveniente (vedi nota a pag. 50). Una diga simile fu pure progettata ed eseguita presso Manilla, nelle Filippine (v. Engineering Record 23 ag. 1913).

essendo x la profondità variabile sotto il livello di massima ritenuta, ed A l'altezza totale della costruzione.

Per V abbiamo già trovata la espressione:

$$V = \frac{l^2}{2} \cdot \frac{1}{\frac{k}{x} - \frac{9.833}{\varphi_0} + 3,60} \cdot \frac{\varphi_0}{\operatorname{sen}^2 \varphi_0} \tag{13}$$

dove φ_0 è espresso in archi.

Integrando questo valore rispetto a x e sostituendo i limiti si otterrebbe W in funzione di φ_0.

L'equazione:

$$\frac{dW}{d\varphi_0} = o$$

fornirebbe il valore più conveniente di φ_0, per una data corda e per dati valori di k e di A. È facile vedere che questo valore di φ_0, per la proporzionalità di V e di l^2, è indipendente della corda l, ma dipende solo da k e da A.

Il procedimento suddetto non si presenta agevole, anzi conduce a formule complicatissime e di difficile maneggio. Poichè d'altra parte la equazione (6) su cui tutto il calcolo è basato non è la vera equazione del problema, ma solo una equazione approssimata, conviene sostituire quella espressione con altra ugualmente approssimata, ma più acconcia per il calcolo che ci occupa.

La (13) mostra che:

$$\frac{V}{l^2} = f\left(\frac{p_e}{k}, \varphi_0\right)$$

e se eseguiamo uno sviluppo in serie secondo le potenze di $\frac{p_e}{k}$ arrestandoci ai primi tre termini, otterremo:

$$\frac{V}{l^2} = c + \alpha \frac{p_e}{k} + \beta \left(\frac{p_e}{k}\right)^2$$

ma per $\frac{p_e}{k} = o$ cioè per $x = o$ deve aversi, considerando il profilo teorico della diga, $c = o$, quindi:

$$\frac{V}{l^2} = \alpha \frac{p_e}{k} + \beta \left(\frac{p_e}{k}\right)^2 \tag{14}$$

dove α e β sono funzioni della sola φ_0.

D'altra parte per ogni valore di φ_0 è facile calcolare direttamente i valori di:

$$\frac{V}{l^2} = \frac{\varphi_0}{2\operatorname{sen}^2\varphi_0} \cdot \frac{1}{\eta}$$

avendo già precedentemente calcolati i valori di η per diversi valori di $\frac{p_e}{k}$.

Il risultato di questi calcoli è raccolto nella Tab. IV a pag. 53. Col metodo già innanzi esposto, considerando i valori delle tabelle come punti rilevati di una funzione che si vuol porre sotto la forma (14), i coefficienti α e β possono ricavarsi col metodo dei minimi quadrati.

Detto ε l'errore che si commetterà calcolando i volumi con la (14), sarà:

$$\varepsilon = \frac{V}{l^2} - \alpha \frac{p_e}{k} - \beta \left(\frac{p_e}{k}\right)^2$$

dove i valori di $\frac{p_e}{k}$ ed i corrispondenti di $\frac{V}{l^2}$ sono quelli calcolati direttamente e riportati nella tabella.

È preferibile operare sull'errore percentuale:

$$\chi = \frac{\varepsilon}{\frac{V}{l^2}} = 1 - \alpha \frac{\frac{p_e}{k}}{\frac{V}{l^2}} - \beta \frac{\left(\frac{p_e}{k}\right)^2}{\frac{V}{l^2}}$$

I valori di α e β che rendono minima la somma dei quadrati di tali errori percentuali si ottengono dalle equazioni:

$$\sum \frac{\frac{p_e}{k}}{\frac{V}{l^2}} - \alpha \sum \frac{\left(\frac{p_e}{k}\right)^2}{\left(\frac{V}{l^2}\right)^2} - \beta \sum \frac{\left(\frac{p_e}{k}\right)^3}{\left(\frac{V}{l^2}\right)^2} = o$$

$$\sum \frac{\left(\frac{p_e}{k}\right)^2}{\frac{V}{l^2}} - \alpha \sum \frac{\left(\frac{p_e}{k}\right)^3}{\left(\frac{V}{l^2}\right)^2} - \beta \sum \frac{\left(\frac{p_e}{k}\right)^4}{\left(\frac{V}{l^2}\right)^2} = o$$

Il calcolo è laborioso ma non presenta difficoltà, ed è stato eseguito per i singoli valori di $2\varphi_0$ e per i valori di $\frac{p_e}{k}$ ristretti nell'ambito più comunemente verificato in pratica,

cioè per $\frac{k}{p_e}$ compreso fra 5 e 20, e quindi per $\frac{p_e}{k}$ fra 0,20 e 0,05.

I valori di α e β sono raggruppati nella tabella seguente, assieme ai massimi errori percentuali χ.

$2\varphi_0$	α	β	χ
180°	0,7215	3,6494	1,15 %
170°	0,6732	4,1176	1,24 %
160°	0,6342	4,7155	1,32 %
150°	0,6025	5,5115	1,42 %
140°	0,5768	6,5357	1,36 %
130°	0,5573	7,8908	1,17 %
120°	0,5454	9,6647	0,95 %

Gli errori, come si vede non raggiungono l'1,5 %, ciò che rende legittimo l'uso delle (14).

Per mezzo della precedente tabella, e ripetendo il procedimento già seguito si possono ricavare le espressioni di α e β in funzione di φ_0.

Posto infatti:

$$\alpha = a + b\varphi_0 + c\,\varphi_0^2$$

i valori di $a\ b\ c$ sono dati dal sistema:

$$\begin{cases} 7a + b\Sigma\varphi_0 + c\,\Sigma\varphi_0^2 = \Sigma\alpha \\ a\Sigma\varphi_0 + b\Sigma\varphi_0^2 + c\,\Sigma\varphi_0^3 = \Sigma\alpha\varphi_0 \\ a\Sigma\varphi_0^2 + b\Sigma\varphi_0^3 + c\,\Sigma\varphi_0^4 = \Sigma\alpha\varphi_0^2 \end{cases}$$

E così analogamente per il calcolo di β.

Eseguendo le operazioni numeriche si può esprimere il valore di $\frac{V}{l^2}$ in funzione di φ_0 e $\frac{p_e}{k}$:

$$\frac{V}{l^2} = (0{,}94151 - 0{,}0148885 \cdot \varphi_0 + 0{,}00013816 \cdot \varphi_0^2)\,\frac{p_e}{k} + \tag{15}$$
$$+ (51{,}6581 - 1{,}03614 \cdot \varphi_0 + 0{,}00560074 \cdot \varphi_0^2)\left(\frac{p_e}{k}\right)^2$$

dove φ_0 è espresso in gradi sessagesimali.

L'approssimazione che si ottiene con questa formula è sempre nei limiti ammessi, perchè l' errore non raggiunge mai il 2,5 % e di rado supera il 2 %; la (15) ha perciò lo stesso grado di esattezza della (6).

10. — Massima economia in una diga a profilo simmetrico e corda costante. — La (13) o (15) è facilmente integrabile, per cui, detta A la profondità ed L la larghezza costante della diga, sarà :

$$\frac{W}{L^2} = \int_0^A \left[\alpha \frac{x}{k} + \beta \left(\frac{x}{k}\right)^2 \right] dx = \frac{A^2}{k} \left(\frac{1}{2} \alpha + \frac{1}{3} \beta \frac{A}{k} \right)$$

da cui :

$$\frac{W}{A L^2} = \frac{A}{k} \left(\frac{1}{2} \alpha + \frac{1}{3} \beta \frac{A}{k} \right) \tag{16}$$

Con questa formula, si può, per ogni sistema di valori delle grandezze A, k, L, calcolare il valore di W o di $\frac{W}{AL^2}$ in corrispondenza di diversi valori di $2\varphi_0$. È possibile così determinare caso per caso il più conveniente valore dell'ampiezza.

Si può però procedere in modo generale, derivando la (16) rispetto a φ_0 ed eguagliando a zero:

$$\frac{1}{A L^2} \frac{dW}{d\varphi_0} = \frac{A}{k} \left(\frac{1}{2} \frac{d\alpha}{d\varphi_0} + \frac{1}{3} \frac{d\beta}{d\varphi_0} \cdot \frac{A}{k} \right) = 0$$

da cui :

$$\frac{A}{k} = - \frac{3}{2} \frac{\frac{d\alpha}{d\varphi_0}}{\frac{d\beta}{d\varphi_0}}$$

I valori delle derivate $\frac{d\alpha}{d\varphi_0}$ e $\frac{d\beta}{d\varphi^0}$ si possono ottenere derivando le espressioni in parentesi della (15), ma risulta più esatto un procedimento di derivazione grafica delle curve di α e β in funzione di φ_0, disegnate per mezzo dei valori della tabella a pag. 75.

I valori di $\frac{A}{k}$ per diversi valori di $2\varphi_0$, calcolati come si è detto, sono raccolti quì di seguito:

$2\varphi_0$	133° 34	135°	140°	150°	160°	170°	180°
$\frac{k}{A}$	∞	54,29	34,11	20,99	12,49	8,21	5,36

e con essi si è costruito il diagramma segnato a trattini nella fig. 8 a pag. 67.

Poichè il diagramma ha un andamento nettamente iperbolico, si può, analogamente a quanto si è fatto per un singolo anello, esprimere la dipendenza fra $\frac{k}{A}$ e $2\varphi_0$ con la formula:

$$\left(\frac{k}{A} + 8{,}787\right)\left(2\varphi_0 - 120^\circ{,}317\right) = 844{,}33 \tag{17}$$

in cui i valori numerici sono stati determinati col solito procedimento.

L'errore che si commette con la (17) non supera nei limiti pratici i due o tre gradi nell'ampiezza, spostamento che, come è noto, è senza sensibile influenza sul volume totale della diga.

11. — Massima economia in una diga con paramento a monte verticale e corda costante. — Il procedimento ora seguito per l costante, cioè per una diga con linee di paramento simmetriche nella sezione trasversale, può essere ripetuto per il caso del paramento a monte verticale quando cioè si ritiene costante la corda l_e dell'arco di estradosso.

Si ha evidentemente

$$\frac{l_e}{l} = \frac{r + \frac{h}{2}}{r} = 1 + \frac{1}{2\eta}$$

e quindi:

$$\frac{V}{l_e^2} = \frac{V}{l^2} \cdot \frac{1}{\left(1 + \frac{1}{2\eta}\right)^2}$$

Moltiplicando i termini $\frac{V}{l^2}$ dati dalla Tab. IV per i valori rispettivi di $\frac{1}{\left(1+\frac{1}{2\eta}\right)^2}$, ed operando sui termini $\frac{V}{l_e^2}$ così ottenuti allo stesso modo che si è visto nel paragrafo precedente, si sono calcolati i coefficienti α' e β dell'espressione:

$$\frac{V}{l_e^2} = \alpha' \frac{p_e}{k} + \beta' \left(\frac{p_e}{k}\right)^2$$

ed i loro valori, sono stati raccolti qui di seguito:

$2\varphi_0$	α'	β'
180°	0,7700	1,7451
170°	0,7276	2,1000
160°	0,6930	2,5733
150°	0,6667	3,1799
140°	0,6499	3,9243
130°	0,6438	4,8527
120°	0,6525	6,0028

Determinando i valori di $\frac{d\alpha'}{d\varphi_0}$ e $\frac{d\beta'}{d\varphi_0}$ si sono ottenuti i valori di $\frac{k}{A}$ a cui corrispondono, per le varie ampiezze, i volumi minimi di tutta la diga, come risulta dalla tabella che segue:

$2\varphi_0$	133°34′	135°	140°	150°	160°	170°	180°
$\frac{k}{A}$	∞	101,90	45,00	22,13	11,89	7,36	4,27

Il diagramma relativo è stato disegnato a puntini nella fig. 8 a pag. 67.

La funzione che lega $\frac{k}{A}$ e $2\varphi_0$ può essere rappresentata in questo caso dalla formula:

$$\left(\frac{k}{A} + 7{,}906\right)\left(2\varphi_0 - 128^\circ{,}042\right) = 632{,}64 \tag{18}$$

analoga alla (17), e di essa molto più esatta, perchè gli errori che si commettono con la (18) di rado superano un grado nell'ampiezza.

12. — Parallelo fra il profilo simmetrico ed il profilo con paramento verticale a monte. — Le formule (17) e (18) servono a fissare agevolmente l'ampiezza più conveniente per una data costruzione; ampiezza che, come si vede, è indipendente dal valore della corda media o della corda di estradosso.

Una volta determinato l'angolo $2\varphi_0$, si disegna, con l'aiuto della (6), o con la costruzione indicata al paragrafo 4, la sezione trasversale della diga.

Dall'esame delle tre curve tracciate in fig. 8 a pag. 67, relative ad un arco singolo, ed al complesso della diga nei due casi di paramento simmetrico e di paramento a monte verticale, si desume agevolmente:

a) che, come è intuitivo, l'ampiezza più conveniente per una data diga è sempre minore di quella più conveniente per il suo anello più profondo, ed è sempre maggiore di quella di 133°34′ conveniente per l'anello superficiale;

b) che per uno stesso valore di $\frac{k}{A}$, nell'ambito della pratica, (e cioè per $\frac{k}{A}$ compreso fra 5 e 40), la ampiezza conveniente per la diga simmetrica è maggiore, eguale, o minore di quella per la diga a paramento a monte verticale, secondo che $\frac{k}{A}$ risulti minore, eguale, o maggiore di 15,55. Se $\frac{k}{A} = 15{,}55$, l'ampiezza da adottare, comune nei due casi è di 155°;

c) che la differenza delle ampiezze corrispondenti allo stesso valore di $\frac{k}{A}$ nei due casi considerati, è sempre, nei limiti pratici, di pochi gradi, e perciò senza sensibile influenza sul volume totale della diga.

Ritenendo appunto che per un determinato $\frac{k}{A}$ la stessa ampiezza possa convenire nei due casi, il volume totale della diga sarà:

$$W = Al^2 \left(\frac{1}{2}\alpha + \frac{1}{3}\beta\frac{A}{k}\right)\frac{A}{k}$$

oppure:

$$W_e = A l_e^2 \left(\frac{1}{2}\alpha' + \frac{1}{3}\beta' \frac{A}{k}\right)\frac{A}{k}$$

secondo che sia $l =$ cost. o $l_e =$ cost., e riferendo i coefficienti $\alpha, \alpha', \beta, \beta'$ allo stesso valore di $2\varphi_0$.

Poichè d'altra parte:

$$l_e = \left(1 + \frac{1}{2\eta}\right) l$$

dove η si intende calcolato per l'anello inferiore della diga, sarà:

$$W_e \lesseqgtr W$$

secondo che:

$$\frac{1}{2}\alpha + \frac{1}{3}\beta \frac{A}{k} \lesseqgtr \left(\frac{1}{2}\alpha' + \frac{1}{3}\beta' \frac{A}{k}\right)\left(1 + \frac{1}{3\eta}\right)^2 \tag{19}$$

Disuguaglianza che serve a dare il criterio della convenienza economica dell'uno o dell'altro tipo di profilo, se si pone per η il suo valore ricavato dalla (5) o dalla (6).

È facile constatare che è in generale

$$W_e > W$$

Se per es. $\frac{k}{A} = 22$, a cui corrisponde l'angolo più conveniente di circa 150^0, e quindi $\eta = 18$, la (19) mostra che W_e ha su W un eccesso del 5,7 %.

Se invece $\frac{k}{A} = 8$ per cui $2\varphi_0 = 170^0$ circa, ed $\eta = 4{,}79$, W_e ha su W un eccesso del 7,5 %.

Questi due casi sono pressochè ai limiti estremi dell'ambito pratico di $\frac{k}{A}$, e può quindi concludersi che la diga a paramento a monte verticale ha un eccesso di volume del $6 \div 7$ % in media su quella a profilo simmetrico.

Ciò è dimostrato anche dalla costruzione data al paragrafo 4, poichè l'area della sezione trasversale della diga è identica nei due casi, mentre il raggio dell'arco descritto dal baricentro della detta sezione è maggiore nella diga con profilo a monte verticale.

Occorre avvertire che questo risultato si ottiene trascurando nella diga a profilo simmetrico l' inclinazione della spinta dell'acqua: benvero tale inclinazione è, nella maggior parte dei casi, molto lieve [1]).

La diga a profilo simmetrico offre inoltre una maggiore stabilità per il peso proprio, poichè su ogni sezione orizzontale lo sforzo risulta baricentrico, mentre nella diga con profilo a monte verticale la risultante dei pesi è eccentrica e provoca uno sforzo unitario di compressione a monte, maggiore che a valle.

Tuttavia la stabilità all'azione del peso non desta preoccupazioni nelle dighe ad arco, le quali sono in genere costituite, stante le esiguità dello spessore, in calcestruzzo di cemento, a cui compete un alto valore del carico di sicurezza.

Se quindi supponiamo, a vantaggio della stabilità, che la diga abbia uno spessore costante, la sua altezza deve essere tale che:

$$A < \frac{k}{\gamma}$$

dove γ è il peso specifico della struttura.

Questa relazione è in genere sempre verificata.

Tutto quanto si è detto per le dighe a generatrici verticali, può ritenersi anche per quelle a generatrici inclinate,

---

[1]) La inclinazione α della spinta dell' acqua sulla orizzontale può calcolarsi preventivamente, osservando che:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{d\frac{h}{2}}{dx}$$

e quindi, derivando la (9):

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\frac{r}{k}}{2\left(1 - \frac{a}{k}x\right)^2}$$

Qualora questo valore risulti, per la massima profondità, troppo forte, sarà opportuno tener conto della inclinazione della pressione o ricorrere al tipo con paramento a monte verticale.

quando si consideri costante su ogni anello la pressione dell'acqua e si trascuri la componente del peso proprio.

Su questo argomento tuttavia mi riservo di ritornare in un prossimo scritto.

13. — Calcolo delle dighe a corda variabile. — Se la determinazione degli elementi di una diga col criterio della minima spesa, nelle dighe a corda costante si può, come abbiamo visto, eseguire in modo generale, lo stesso non può farsi per le dighe a corda variabile, come si realizzano quasi sempre in gole montane sbarrate da un arco unico.

In esse è costante il raggio medio o il raggio di estradosso, ma la corda varia secondo la forma della sezione di impianto, forma che è diversissima da caso a caso, e non si presta ad essere rappresentata con funzioni analitiche di tipo determinato.

Poichè generalmente la sezione d'impianto si restringe in basso, e spesso notevolmente, ne risulta che anche se gli anelli superiori hanno notevole ampiezza, quelli verso il fondo possono risultare di ampiezze limitatissime, ed in generale molto al disotto del limite di 133°34′, trovato nell'esame degli archi indeformabili.

D'altra parte la Tab. IV a pag. 53 mostra che, per uno stesso valore di $\frac{p_e}{k}$, cioè per una data profondità, lo spessore h, essendo r costante, cresce col diminuire dell'ampiezza, sicchè è prevedibile che, per piccole ampiezze e forti profondità, il valore di η scenda anche al disotto del minimo di $\eta = 5$, assunto fin ora.

Con questi criteri ho proceduto al calcolo diretto — a mezzo delle (2), (3) e (4) — dei valori di $\frac{k}{p_e}$, per valori di η compresi fra 2 e 20 e per ampiezze inferiori a 120° fino a 10°.

I risultati sono raccolti nella Tab. VII a pag. 85, tabella che non è se non una estensione della Tab. IV.

Come si è previsto, per valori di $\frac{k}{p_e}$ piuttosto bassi, il valore corrispondente di $\frac{r}{h}$ diminuisce al diminuire dell' am-

TABELLA VII.

$2\varphi_0$	$\eta = \frac{r}{h}$	$\frac{k}{p_e}$	$\frac{p_e}{k}$	$\frac{V}{l^2}$	$\frac{V}{r^2}$	$\frac{V}{r_e^2}$
	2	5,08	0,1967	0,3576	0,9599	0,6143
	3	7,56	0,1323	0,2384	0,6400	0,4701
	4	9,56	0,1047	0,1788	0,4800	0,3792
110°	5	11,20	0,0893	0,1430	0,3840	0,3174
	7,5	14,51	0,0689	0,0954	0,2559	0,2249
	10	17,35	0,0577	0,0715	0,1920	0,1742
	15	22,53	0,0444	0,0477	0,1280	0,1198
	20	27,68	0,0361	0,0358	0,0960	0,0914
	2	4,89	0,2044	0,3718	0,8727	0,5585
	3	7,58	0,1319	0,2478	0,5818	0,4274
	4	9,86	0,1014	0,1859	0,4363	0,3447
100°	5	11,76	0,0850	0,1487	0,3491	0,2885
	7,5	15,48	0,0646	0,0991	0,2327	0,2045
	10	18,53	0,0540	0,0744	0,1745	0,1583
	15	24,02	0,0416	0,0496	0,1163	0,1088
	20	29,12	0,0343	0,0372	0,0873	0,0831
	2	4,59	0,2178	0,3927	0,7854	0,5027
	3	7,47	0,1339	0,2618	0,5236	0,3846
	4	10,08	0,0992	0,1964	0,3927	0,3103
90°	5	12,34	0,0811	0,1571	0,3142	0,2597
	7,5	16,73	0,0598	0,1047	0,2094	0,1840
	10	20,16	0,0496	0,0785	0,1571	0,1425
	15	25,93	0,0386	0,0523	0,1047	0,0980
	20	31,26	0,0320	0,0393	0,0785	0,0747
	2	3,56	0,2813	0,4642	0,6109	0,3910
	3	6,33	0,1581	0,3094	0,4072	0,2991
	4	9,31	0,1074	0,2321	0,3054	0,2413
70°	5	12,24	0,0817	0,1857	0,2443	0,2019
	7,5	18,59	0,0538	0,1238	0,1629	0,1432
	10	23,56	0,0424	0,0928	0,1222	0,1108
	15	31,68	0,0316	0,0619	0,0815	0,0763
	20	37,27	0,0268	0,0464	0,0611	0,0582
	2	2,17	0,4613	0,6109	0,4363	0,2792
	3	4,11	0,2435	0,4072	0,2909	0,2137
	4	6,53	0,1531	0,3054	0,2182	0,1724
50°	5	9,32	0,1073	0,2443	0,1745	0,1442
	7,5	17,09	0,0585	0,1629	0,1164	0,1023
	10	24,89	0,0402	0,1222	0,0873	0,0792
	15	35,73	0,0280	0,0815	0,0582	0,0545
	20	48,48	0,0206	0,0611	0,0436	0,0415
	2	0,87	1,1468	0,9769	0,2618	0,1676
	3	1,68	0,5967	0,6512	0,1745	0,1282
	4	2,75	0,3636	0,4884	0,1309	0,1034
30°	5	4,07	0,2459	0,3907	0,1047	0,0865
	7,5	8,36	0,1197	0,2605	0,0698	0,0613
	10	13,77	0,0726	0,1954	0,0524	0,0475
	15	26,51	0,0377	0,1307	0,0349	0,0327
	20	39,86	0,0287	0,0977	0,0262	0,0249
	2	0,10	9,7087	2,8685	0,0873	0,0559
	3	0,20	5,0251	1,9123	0,0582	0,0427
	4	0,32	3,1546	1,4342	0,0436	0,0345
	5	0,62	1,6181	1,1474	0,0349	0,0288
10°	7,5	1,00	0,9967	0,7649	0,0233	0,0205
	10	1,69	0,5936	0,5737	0,0175	0,0159
	15	3,75	0,2671	0,3827	0,0116	0,0109
	20	6,59	0,1517	0,2869	0,0087	0,0083
	40	25,55	0,0392	0,1435	0,0044	0,0043

piezza, ma al di sotto di una certa ampiezza, caratteristica per ogni $\frac{k}{p_e}$, torna ad aumentare.

Così per esempio se $\frac{k}{p_e} = 7{,}5$ si ha il minimo $\frac{r}{h}$ per $2\varphi_0 = 100^0$, per cui $\frac{r}{h}$ è poco inferiore a 3, mentre per $\frac{k}{p_e} = 10$ il minimo $\frac{r}{h}$, eguale circa a 4, si ha per $2\varphi_0 = 90^0$; e per $\frac{k}{p_e} = 20$ si ha per $2\varphi_0$ fra 50^0 e 30^0.

I risultati corrispondenti a valori troppo bassi di $\frac{r}{h}$ vanno accolti con riserva, perchè essi sono basati sulle formule per solidi a piccola curvatura.

In questi casi, come avverte il Guidi, occorrerebbe ricorrere alle formule per i solidi ad asse curvilineo, ovvero per quanto riguarda le deformazioni, sostituire [1]) nelle formule per solidi di piccola curvatura, al momento d'inerzia:

$$I = \frac{1}{12} h^3 = 0{,}08333\, h^3$$

della sezione trasversale dell'anello di altezza unitaria, il momento fittizio:

$$I_1 = \frac{\varkappa}{(\varkappa + 1)^2} r^2 h = \frac{12 \varkappa \eta^2}{(\varkappa + 1)^2} \cdot \frac{h^3}{12};$$

ed al raggio r, il raggio fittizio:

$$r_1 = \frac{1}{\varkappa + 1} r$$

Ora il coefficiente di forma $\varkappa$ è, per la sezione rettangolare che si considera:

$$\varkappa = \frac{1}{3}\left(\frac{h}{2r}\right)^2 + \frac{1}{5}\left(\frac{h}{2r}\right)^4 + \frac{1}{7}\left(\frac{h}{2r}\right)^6 + \ldots$$

Limitando lo sviluppo ai primi tre termini,

---

[1]) Vedi G. Albenga — Contributo alla teoria dei solidi a grande curvatura (Atti R. Acc. Scienze di Torino — 1909).

TABELLA VIII.

Valori di $\frac{k}{\mu_e}$

$\frac{r}{h}$	$2\varphi_0$													
	180°	170°	160°	150°	140°	130°	120°	110°	100°	90°	70°	50°	30°	10°
2								5,08	4,89	4,59	3,56	2,17	0,87	0,10
3								7,56	7,58	7,47	6,33	4,11	1,68	0,20
4								9,56	9,86	10,08	9,31	6,53	2,75	0,32
5	7,70	8,03	8,41	8,85	9,35	9,90	10,52	11,20	11,76	12,34	12,24	9,32	4,07	0,62
7,5	10,21	10,57	10,98	11,47	12,05	12,73	13,53	14,51	15,48	16,73	18,59	17,09	8,36	1,00
10	12,71	13,07	13,50	14,00	14,61	15,34	16,23	17,35	18,53	20,16	23,56	24,89	13,77	1,69
15	17,69	18,06	18,49	19,01	19,64	20,40	21,35	22,53	24,02	25,93	31,68	35,73	26,51	3,75
20	22,68	23,05	23,49	24,01	24,65	25,43	26,41	27,68	29,12	31,26	37,27	48,48	39,86	6,59
30	32,67	33,04	33,48	34,01	34,65	35,44	36,43							25,55
40	42,66	43,03	43,47	44,00	44,64	45,44	46,44							
60	62,66	63,02	63,46	63,99	64,63	65,43	66,44							
80	82,65	83,02	83,46	83,99	84,63	85,42	86,44							

per:

$$\frac{r}{h} = 2 \quad \text{si ha:} \quad \varkappa = 0{,}02164\,;$$

$$\frac{12\,\varkappa\,\eta^2}{(\varkappa+1)^2} = 0{,}99516 \qquad \frac{1}{\varkappa+1} = 0{,}9792$$

per:

$$\frac{r}{h} = 3 \quad \text{si ha:} \quad \varkappa = 0{,}00941$$

$$\frac{12\,\varkappa\,\eta^2}{(\varkappa+1)^2} = 0{,}99744 \qquad \frac{1}{\varkappa+1} = 0{,}9907$$

per:

$$\frac{r}{h} = 5 \quad \text{si ha:} \quad \varkappa = 0{,}00335$$

$$\frac{12\,\varkappa\,\eta^2}{(\varkappa+1)^2} = 0{,}99828 \qquad \frac{1}{\varkappa+1} = 0{,}9965$$

È facile dedurne un apprezzamento sull'errore approssimativo che si commette, adottando i risultati già notati, per piccoli valori di $\frac{r}{h}$. Esso errore mentre è dell'ordine del $2 \div 3\,\%$ per $\frac{r}{h} = 2$, non potrà superare l'1,5 % per $\frac{r}{h} = 3$, e sarà certo minore del 0,5 % per $\frac{r}{h} = 5$.

Nei limiti di approssimazione presi a base di questo studio si possono ritenere attendibili i risultati trovati finchè $\frac{r}{h}$ non risulti inferiore al valore 3, ciò che nei casi della pratica può avvenire solo per qualche costruzione di tipo eccezionalissimo.

14. — Nella Tabella VIII a pag. 87 sono riassunti i valori di $\frac{k}{p_e}$ desunti dalle Tab. IV e VII, allo scopo di agevolare il calcolo di una diga ad arco unico in una vallata di sezione qualunque, calcolo che può procedere nel modo seguente.

Sopra il rilievo topografico disegnato a curve di livello della località dove dovrà sorgere la diga, si fissa l'andamento generale di questa, e quindi l'ampiezza $2\varphi_0$ dell'anello superiore.

In genere conviene tenere $2\varphi_0$ quanto più grande è possibile, perchè, nella maggior parte dei casi, la necessità di bene impostare la diga nelle sponde obbliga a tenere l'ampiezza degli anelli superiori al disotto del valore che corrisponderebbe alla costruzione di minor cubatura.

Determinato in planimetria il punto che è la proiezione dei centri di curvatura dei diversi anelli, sarà agevole rilevare dal disegno le profondità, e quindi le pressioni p_e, corrispondenti ad anelli che abbiano ampiezze $2\varphi_0$ eguali a quelle con cui si entra nella Tab. VIII. Si calcolano quindi i termini $\frac{k}{p_e}$ rispettivi, e dalla Tabella stessa, mediante una semplice interpolazione, si ricavano i valori di $\frac{r}{h}$.

Se la diga è a paramento a monte verticale, essendo:

$$r_e = r + \frac{h}{2}$$

il raggio costante dell'estradosso, si calcola il rapporto:

$$\frac{r_e}{h} = \frac{r}{h} + 0{,}5$$

e poi il valore di h.

Poichè, come si è detto, per uno stesso $\frac{r}{h}$ i valori di $\frac{k}{p_e}$ crescono col diminuire di $2\varphi_0$ fino ad un valore massimo, al di là del quale diminuiscono nuovamente [1]), può accadere che, per particolari condizioni di terreno e profondità, un anello più in basso richieda uno spessore inferiore di uno più alto. È chiaro che in tal caso si debba aumentare lo spessore della parte inferiore della diga, fino a renderlo almeno uguale a quello della parte soprastante.

15. — Si abbia, ad esempio da, impiantare una diga nella gola rappresentata in planimetria dalla fig. 9, ed il livello di massima ritenuta sia alla quota 160. La convenienza di una diga ad arco, data la ristrettezza della valle, è mani-

---

[1]) I valori massimi di $\frac{k}{p_e}$ per ogni $\frac{r}{h}$ sono inquadrati in un rettangolo, nella Tab. VIII.

festa; per quanto riguarda il tipo supponiamo di volere adottare quello con paramento a monte verticale.

L'ampiezza dell'anello superficiale non può assumersi molto grande, per la necessità di bene impostare la costruzione contro le due sponde rocciose.

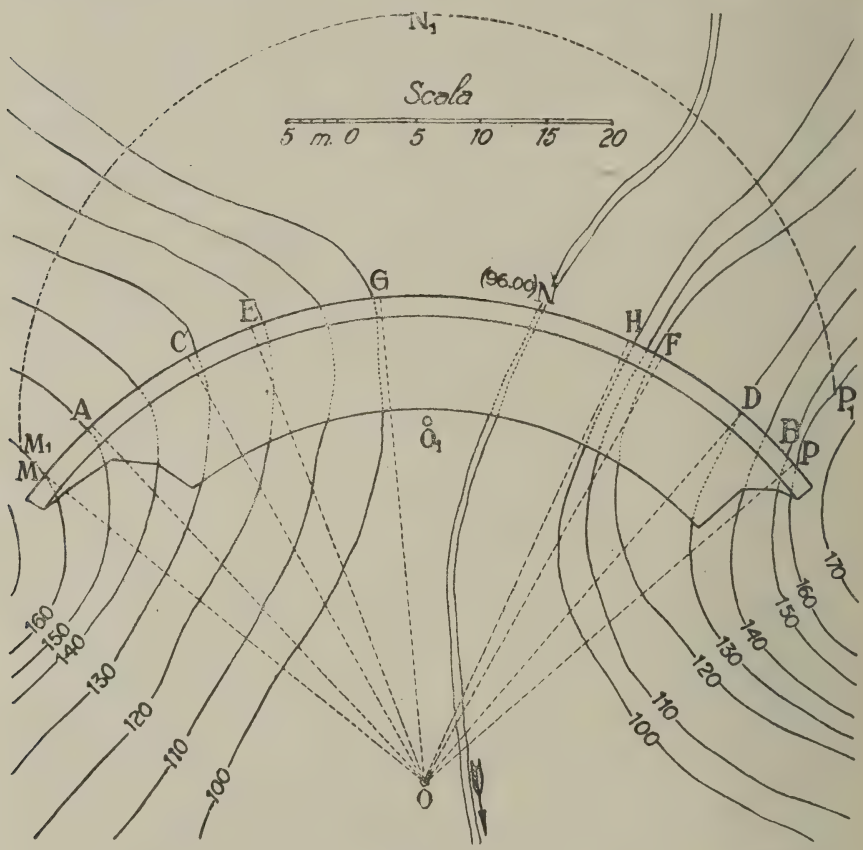


Fig. 9

L'arco $M_1N_1P_1$ di centro O_1 ed ampiezza 180°, non potrebbe, ad esempio, adottarsi senza qualche preoccupazione, perchè le spinte alle imposte della diga impegnerebbero non già tutta la massa dei flanchi della gola, ma solo le due sporgenze rocciose, di dimensioni relativamente piccole. Conviene quindi assegnare la traccia dell'estradosso della diga, secondo un arco MNP di ampiezza minore, ma bene impostato contro le sponde.

Per meglio mostrare il procedimento si è scelta una ampiezza *MOP* molto piccola, mentre in genere conviene come si è detto, fissarla quanto più grande è possibile, compatibilmente con le condizioni locali.

Condotti i raggi *OM* e *OP*, si misura l'angolo *MOP* che risulta di circa 100°, e con qualche tentativo si determinano gli archi *AB*, *CD*, *EF*, *GH*, i quali sottendono rispettivamente gli angoli di 90°, 70°, 50°, 30°, e hanno i due estremi alla stessa quota.

Siano 149; 131; 121,50; 99,50 le quote delle coppie di estremi anzidetti, corrispondenti a profondità di m. 11; 29; 38,50; 60,50 sotto il pelo d'acqua massimo, e si abbia, per gli archi rispettivi: $\frac{k}{p_e} = 22{,}75$; 8,62; 6,50; 4,14, supposto che la diga si costruisca in calcestruzzo di cemento con carico di sicurezza $k = 250$ T. a mq. Dalla Tab. VIII per i valori di $2\varphi_0$ e corrispondenti $\frac{k}{p_e}$, si ricavano per interpolazione i rapporti $\frac{r}{h}$, e cioè $\frac{r}{h} = 12{,}24$; 3,77; 3,98; 5,04. I rapporti $\frac{r_e}{h}$ si ottengono aggiungendo 0,5, per cui $\frac{r_e}{h} = 12{,}74$; 4,27; 4,48; 5,54.

Poichè il raggio dell'estradosso risulta dalla planimetria di m. 37,50, gli spessori h alle quote 149; 131; 121,50; 99,50, saranno rispettivamente di m. 2,95; 8,78; 8,37; 6,77.

L'anello di base, calcolato come se avesse la stessa ampiezza di 30°, richiederà uno spessore di m. 6,96.

Si può disegnare così il profilo teorico *MACEGN* della sezione trasversale della diga (fig. 10); poichè però gli spessori teorici al disotto del punto *C* diminuiscono, nel profilo pratico, — che è disegnato a tratto pieno, — si può mantenere costante lo spessore al disotto del punto *C*.

Nella fig. 9 poi si è disegnata la planimetria della diga così calcolata.

16. — Una volta stabilito il profilo pratico di una diga a volta ad arco unico, — a parte quanto riguarda gli sforzi dovuti ai cambiamenti di temperatura (V. Capitolo seguente), — occorre calcolare, per ogni anello, gli sforzi mas-

simi e minimi, tanto in chiave che all'imposta. Ciò allo scopo di determinare l' importanza degli sforzi di trazione, che, come si è visto al Cap. I pag. 24, sono inevitabili per piccole ampiezze, qualunque sia lo spessore della diga. All' uopo si può tener presente la Tab. II., ivi riportata.

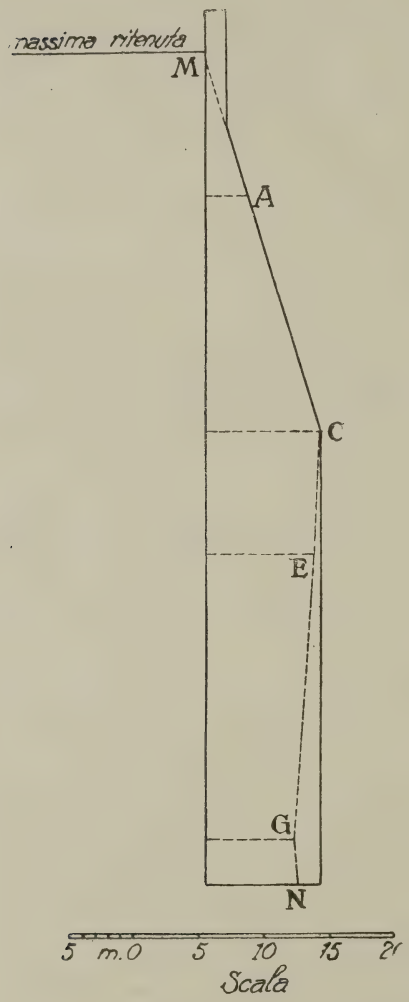


Fig. 10

Opportune armature metalliche saranno adottate, tali da resistere agli sforzi di trazione.

Per il calcolo delle σ_e, σ_i, σ_e', σ_i', possono servire la Tabella data dal Guidi, fino ad ampiezze di 140°; oppure le formule del Ritter in funzione dei coefficienti C_1, C_2, C_3, C_4, C_5, di cui nella Tab. I., a pag. 19, sono riportati i valori per ampiezze da 180° a 10°.

17. — Condizioni di massima economia per una diga a corda variabile. — Se la località prescelta per l'impianto della diga non obbliga ad una ampiezza pressochè determinata per l' anello superficiale, ma permette di scegliere fra diverse soluzioni, può essere utile conoscere quale di esse sia più conveniente, cioè a quale competa il volume minimo di muratura.

Questo calcolo può farsi disegnando vari profili teorici ottenuti partendo da diverse ampiezze $2\varphi_0$ per l'anello superficiale.

Suddividendo poi ognuna delle sezioni trasversali in zone di eguale altezza, e determinando, con l'aiuto della planimetria a curve di livello, per ogni anello la corda l corrispondente, sarà facile, per mezzo delle Tabelle IV e VII, desumere i rapporti $\frac{V}{l^2}$ e quindi i volumi dei singoli anelli.

Una semplice somma farà conoscere il volume totale di muratura richiesto per ognuno dei profili teorici disegnati, e sarà facile stabilire quale sia quello più conveniente.

Anzichè dei rapporti $\frac{V}{l^2}$ ci si può servire dei rapporti $\frac{V}{r^2}$ o $\frac{V}{r_e^2}$, riportati anche nelle suddette tabelle.

Il calcolo si presenta in ogni modo laborioso a causa della doppia interpolazione che si rende necessaria quando i valori di $2\varphi_0$ e di $\frac{r}{h}$ sono intermedi fra quelli che figurano nelle Tabelle stesse.

Con vantaggio può essere preferito il seguente procedimento grafico-analitico, per il quale è stata costruita la annessa Tav. A, che è disegnata una volta per tutte, e serve qualunque siano la forma e le dimensioni della sezione di impianto della diga.

In essa sono tracciate le curve rappresentatrici di $\frac{V}{r^2}$ direttamente in funzione di $\frac{k}{p_e}$, anzi del rapporto inverso $\frac{p_e}{k}$, per angoli $2\varphi_0$ variabili da 180° a 10°.

La Tav. A serve per dighe a profilo simmetrico, ma qualora si voglia estendere il procedimento a dighe con paramento a monte verticale, basterà riferirsi alla Tav. A *bis*, costruita come la precedente, riportando, invece dei valori di $\frac{V}{r^2}$, i valori di:

$$\frac{V}{r_e^2} = \frac{V}{r^2} \cdot \frac{r^2}{r_e^2} = \frac{V}{r^2} \left[\frac{2\eta}{2\eta + 1} \right]^2$$

desunti dall'ultima colonna delle Tab. IV e VII.

Assegnato il valore di k, le ascisse delle curve risultano proporzionali alle profondità x dell'anello sotto il pelo di acqua.

Per tal modo, stabilita l'ampiezza $2\varphi_0$ dell'anello superficiale ed il valore costante del raggio r, si ricavano, come si è già detto innanzi, le profondità x, e quindi le ascisse $\frac{p_e}{k}$, relative a quegli anelli che sottendono angoli $2\varphi_0$ rispettivamente eguali agli indici delle curve tracciate nella Tavola A.

Se ora si costruisce una linea che ha le ascisse anzidette, e le relative ordinate eguali a quelle delle curve $\frac{V}{r^2}$ di indici corrispondenti, una tale linea avrà le ascisse proporzionali alla profondità, e le ordinate ai volumi, dei singoli anelli della diga.

L'area racchiusa fra la linea anzidetta, le ordinate estreme e l'asse delle $\frac{p_e}{k}$ sarà proporzionale al volume totale della diga.

Eseguendo la costruzione più volte, partendo da diverse ampiezze dell'anello superficiale, e quindi per valori diversi di r, e misurando con un planimetro le corrispondenti aree S_1, S_2, S_3, i prodotti

$$S_1 r_1^2 \; ; \; S_2 r_2^2 \; ; \; S_3 r_3^2 \ldots$$

saranno proporzionali ai volumi della diga nelle diverse soluzioni, e basterà scegliere quella per cui si ha il minimo valore del prodotto Sr^2.

La costruzione permette di tener conto anche della correzione che si apporta sempre al profilo teorico nella parte superiore della diga, con l'assegnare uno spessore pratico in sommità e con l'aggiungere una maggiore altezza atta a contenere gli eventuali moti ondosi del lago artificiale; come pure permette di tener conto della correzione che si deve talvolta apportare nella zona inferiore, per impedire che gli spessori degli anelli più bassi siano minori di quelli soprastanti.

Per ciò fare ci si avvale delle curve ausiliarie tracciate nella Tav. A, ottenute congiungendo i punti a cui compete uno stesso rapporto $\eta = \frac{r}{h}$.

18. — Il procedimento risulterà chiarito dall' esempio seguente.

Sia KHH_1K_1 la sezione di impianto della diga, che supporremo arrestata inferiormente alla orizzontale HH_1, ottenuta mettendo a nudo e spianando la rocccia sul fondo della valle. La orizzontale HH_1 rappresenta per noi il piano di impianto della diga.

La larghezza KK_1 in sommità è di m. 40, e l'altezza fra il livello di massima ritenuta, che supponiamo coincida proprio con KK_1, e il fondo HH_1 è di m. 35.

Sia la conformazione della vallata così fatta da permettere la scelta dell'ampiezza dell'anello superficiale a completo arbitrio, fino a $2\varphi_0 = 180^0$.

Si vogliano paragonare i volumi della diga quando all'anello superficiale si diano ampiezze di 180^0; 170^0; 160^0; 140^0; 120^0.

Descrivendo degli archi di cerchio con corda di m. 40 ed angoli al centro eguali alle ampiezze suddette, sarà agevole determinare sopra ognuno di tali archi la lunghezza delle corde che sottendono angoli al centro decrescenti di 10^0 in 10^0. Sulla sezione KHH_1K_1 si ricercheranno poi le corde equivalenti, notando le rispettive profondità. A sinistra della sezione sono state tracciate su cinque verticali distinte queste scale delle ampiezze e delle profondità.

La diga si costruisca in calcestruzzo di cemento, per cui si assuma:

$$k = 250\ T. \text{ a mq.}$$

Si avrà:

$$\frac{p_e}{k} = \frac{x}{250} = 0.004 \cdot x$$

essendo x la profondità sotto il pelo d'acqua.

Se $2\varphi_0 = 180^0$ per l'anello superficiale, sarà $r =$ m. 20,00, e dalla prima scala a sinistra della sezione si ricavano i seguenti valori per $\frac{p_e}{k}$ ed x in corrispondenza alle diverse ampiezze:

$2\varphi_0$	180°	170°	160°	150°	140°	130°	120°	100°	110°	90°	80°	70°	60°	50°	45°
x	0	0,5	1	2	4	6	11	13,25	15	16	17,50	22	27,50	33	35
$\frac{p_e}{k}$	0	0,002	0,004	0,008	0,016	0,024	0,044	0,053	0,060	0,064	0,070	0,088	0,110	0,132	0,140

Sovrapponendo un foglio di carta lucida, millimetrata o non, alla Tav. A, si seguino i punti che hanno per ascisse i valori di $\frac{p_e}{k}$ e per ordinate punti successivamente situati sulle curve $\frac{V}{r^2}$, per $2\varphi_0 = 180°$; $170°$, ecc.

Riunendo i punti con una linea *OABC* (a puntini nella Tav. A) e tracciando l'ordinata estrema *CD*, l'area *S* racchiusa in *OABCDO* ci rappresenta il rapporto fra il volume totale *W* della diga ed il quadrato del raggio costante cioè il termine $\frac{W}{r^2}$.

Osservando l'andamento della linea *OABCDO*, rispetto alle linee η tracciate nella Tav. si vedrà subito se gli spessori sono sempre crescenti, o se da un certo punto in poi diminuiscono. Nel caso in esame è chiaro che dopo il punto *R*, dove $\eta = 4{,}3$, i valori di η che competono ai diversi punti della linea aumentano, e quindi lo spessore diminuisce. Dal punto *R* in poi occorre quindi correggere la linea, mantenendo costante il valore di η. Così per esempio al punto *C*, corrispondente all'ampiezza di 45° si sostituisce il punto C_1 che ha l'ordinata DC_1 eguale alla ordinata TT' del punto *T*, intersezione delle linee $2\varphi_0 = 45°$ e $\eta = 4{,}3$; e similmente per gli altri punti compresi fra *R* e *C*. Al tratto di linea *RCD* si sostituisce quindi il tratto RC_1D.

Si voglia ora tener conto dello spessore pratico in superficie, che supponiamo di m. 0,50, e della maggiore altezza della diga, che supponiamo di m. 3.

Il rapporto $\frac{r}{h}$ in sommità non sarà più infinitamente grande come nel profilo teorico, ma risulterà:

$$\eta = \frac{r}{h} = \frac{20}{0{,}5} = 40$$

Il punto A dove la linea $OABC$ incontra la linea $\eta = 40$ ci dà la profondità a cui la diga teorica raggiunge lo spessore di m. 0,50. Al disopra lo spessore resta costante, e resta costante quindi il rapporto η. Se ora sulle verticali corrispondenti ai valori di $\frac{p_e}{k}$ per cui è $2\varphi_0 = 180^0$; 170^0; 160^0 (ecc. fino al valore che corrisponde al punto A), si portino come ordinate, le ordinate dei punti intersezioni delle curve $\frac{V}{r^2}$ per 180^0; 170^0; 160^0 ecc., con la curva $\eta = 40$, si ottiene la poligonale $AabcdM$, che sostituisce il tratto OA, in modo che l'area $Mdcba\ AOM$, racchiusa fra le due linee, rappresenta il maggior volume della diga per effetto dello spessore pratico conferitole in sommità.

Si porti ora sull'asse delle $\frac{p_e}{k}$, a sinistra di O, il segmento $OP = 0{,}004 \times 3$, che rappresenta la maggiore altezza della diga dovuta al franco di tre metri. Il rettangolo $OMNP$ rappresenterà il volume della parte di diga sovrastante la massima ritenuta.

In complesso dunque l'area della figura $PNMdcba\ ABRC_1DOP$, racchiusa fra l'asse delle ascisse e la linea punteggiata, ci rappresenta il rapporto $\frac{W}{r^2}$ tenuto conto del franco, dello spessore in sommità, e della correzione in base. La costruzione, d'altronde semplicissima, si ripete partendo da $2\varphi_0 = 170^0$, e sovrapponendo un altro foglio di carta lucida alla Tav. A, in modo da non imbrattare e confondere la configurazione molto intrecciata delle curve $\frac{V}{r^2}$.

Il raggio sarà ora $r = \frac{l}{2\,sen\,\varphi_0} = 20{,}076$.

Così per 160^0, 140^0 e 120^0 di ampiezza dell'anello superficiale. Misurando allora con un planimetro le aree tracciate sui fogli di carta lucida e moltiplicando ognuna per il quadrato del raggio rispettivo, si hanno numeri proporzionali ai volumi della diga nelle diverse soluzioni.

Il risultato, per l'esempio che ci occupa è riassunto nel seguente specchio:

$2\varphi_0$	S	Sr^2	S_t	$S_t r^2$
180°	3603	14412	3365	13460
170°	3526	14211	3301	13304
160°	3500	14435	3284	13544
140°	3203	14510	3029	13722
120°	2932	15640	2772	14787

I valori delle ultime due colonne, sono relativi alla diga teorica, cioè senza franco, con spessore nullo in sommità, ma con la correzione degli spessori in base.

In entrambi i casi si riconosce che l'angolo più conveniente per l'anello in sommità è di circa 170°, però è facile rendersi conto, dall'esame dell'andamento delle colonne Sr^2 ed $S_t r^2$, che per la diga teorica l'angolo è leggermente maggiore.

L'influsso dello spessore in superficie e del franco tende quindi, come era da prevedersi, ad abbassare il valore dell'ampiezza più conveniente, ma lo spostamento è molto lieve.

Questo esempio conferma poi per le dighe a corda variabile quello che è già ben noto per le dighe a corda costante, che cioè una differenza anche di una diecina di gradi in più o in meno, nel valore dell'ampiezza più conveniente, non accresce il volume della diga più dell'$1 \div 2\%$.

È notevole anche che se la sezione di impianto, fermi restando gli altri dati, avesse una luce costante di m. 40 da cima a fondo, l'angolo più conveniente da adottare, sarebbe risultato di 170° 30', come si può calcolare con le formule date a suo tempo. Non si può trarre da questa coincidenza una illazione generale, ma credo che si possa però affermare che il valore dell'ampiezza più conveniente varia in limiti molto ristretti col variare della forma della sezione di impianto.

CAP. III.

Influenza delle variazioni di temperatura.

1. — Gli sforzi dovuti a variazioni di temperature sono senza dubbio rilevanti per costruzioni come le dighe di sbarramento, eseguite per lo più in regioni montuose dove l'intervallo termico è sensibilmente più ampio che altrove.

Lo studio però di essi presenta serie difficoltà sia perchè non è agevole conoscere la precisa distribuzione delle temperature nell'interno di una struttura muraria in ogni istante, sia perchè manca ogni metodo sicuro di calcolo atto a determinare gli sforzi interni che da una data distribuzione termica sono prodotti.

Si aggiunga a ciò l'influenza, che come vedremo è molto forte, delle manifestazioni di calore che accompagnano la presa del cemento, nonchè, se bene di minore entità, la influenza della contrazione di volume del cemento durante la presa, che valgono a complicare ancora il fenomeno, e lo rendono perciò ribelle ad una analisi rigorosa.

Tuttavia l'esame distinto dei veri fattori, può, con l'aiuto di ipotesi semplificative, dare delle utili indicazioni e specialmente può aprire la strada a ulteriori studi teorici e sperimentali sopra l'importante questione.

Fino a poco tempo fa si è eseguito il calcolo degli sforzi termici in base alla ipotesi semplice di un aumento uniforme di temperatura nei punti interni della diga.

Questa ipotesi è in realtà troppo lontana dalle effettive condizioni che si realizzano in pratica. Il Guidi (op. cit.), per meglio approssimarsi alla realtà del fenomeno, considera per le dighe ad arco, come ho già riferito nel Cap. I, non più una distribuzione uniforme, ma una distribuzione variabile con legge lineare nello spessore della diga.

È già un notevole passo sulla giusta via, ma molta strada ancora resta a percorrere.

È certo, intanto, che gli sforzi termici come finora si calcolano risultano eccessivi nella maggior parte dei casi. Non è possibile dare di questo fatto una dimostrazione inoppugnabile, ma la convinzione costante in questo senso di numerosi ingegneri costruttori di dighe, basate su osservazioni dirette, se pure non eseguite con i debiti controlli [1]), non è elemento da trascurare.

Mi è parso quindi che questo argomento meriti una più accurata analisi, e di essa faranno oggetto le pagine che seguono.

Darò prima delle formule semplici allo scopo di permettere che il calcolo diretto degli archi con i metodi esposti nel Cap. II, possa eseguirsi tenendo conto, se pure in modo approssimativo, degli sforzi dovuti alla temperatura; tenterò quindi una impostazione più razionale del problema degli sforzi termici [2]), generalizzando le formule del Guidi in modo da poterle adottare per una qualunque distribuzione delle temperature, e studiando poi la natura ed il tipo di queste distribuzioni; finalmente accennerò alle esperienze finora acquisite in proposito, ritraendone un controllo delle ipotesi fatte ed un indirizzo per le ricerche future.

2. — *Calcolo diretto delle dighe a volta, tenendo conto delle variazioni di temperatura.* — Nel Cap. I. abbiamo riportate le formule date dal Guidi per gli sforzi unitari prodotti da una variazione lineare di temperatura, considerata scissa in una variazione uniforme t_0 ed una variabile linearmente da $+\frac{\Delta t}{2}$ a $-\frac{\Delta t}{2}$ sulle due facce.

Vediamo come è possibile tener conto di tale elemento nel calcolo diretto di una volta e nella determinazione

---

[1]) Vedi ad es. Ganassini (Politecnico 1921); Mac Intosh (Engin. News Record - Settembre 1919), ecc.

[2]) Userò abbreviativamente la dizione *sforzi termici*, per indicare gli sforzi unitari interni prodotti da contrazioni o dilatazioni termiche in un corpo vincolato.

della ampiezza più conveniente, secondo il procedimento adottato al Cap. precedente per la sola pressione idrostatica.

Si è visto che gli sforzi unitari massimi si hanno, negli archi circolari di spessore uniforme, nell'imposta e all'intradosso, quando non si tiene conto degli sforzi termici; per effetto di questi è noto che il massimo può spostarsi passando dall'intradosso all'estradosso e dalla sezione di imposta a quella di chiave.

Tuttavia nelle condizioni pratiche ordinarie, se la temperatura al momento della costruzione è intermedia fra i massimi invernali ed estivi, risulta in genere che il carico unitario in chiave è inferiore, o appena superiore all'imposta.

D'altra parte il considerare una temperatura iniziale media, corrisponde a ciò che si realizza sempre nella pratica della costruzione, essendo buona norma non costruire o almeno non chiudere le volte in condizioni eccezionali di temperatura, sia troppo rigide, sia troppo calde.

Operando la chiusura nelle stagioni intermedie si ha appunto il vantaggio di ridurre gli scarti degli sforzi unitari dovuti alle variazioni totali di temperatura.

Per tali motivi, e tenuto anche conto dell' indole approssimata di questa ricerca, appare sufficiente anche quì limitarci alla considerazione del solo valore dello sforzo all'intradosso nell'imposta, che è [v. form. (11) Cap. I.]:

$$\varsigma_i' = -E\alpha\left(t_0 \frac{h}{r}\mu_i' + \frac{\Delta t}{2}\right) \tag{1}$$

in cui, se t_e e t_i sono le variazioni di temperatura all'estradosso ed all'intradosso:

$$t_0 = \frac{t_e + t_i}{2} \qquad \frac{\Delta t}{2} = \frac{t_e - t_i}{2}$$

Il coefficiente di t_0 nella (1), cioè il termine $\frac{h}{r}\mu_i'$ è in genere,—sopratutto se l'ampiezza è grande, e l'arco non eccessivamente caricato, — molto minore dell' unità; sicchè nella (1) prevale l'influenza di $\frac{\Delta t}{2}$.

Il caso più sfavorevole da considerare è quando $\frac{\Delta t}{2}$ è negativo, perchè allora ς_i' è sforzo di compressione e si somma con quello dovuto al carico idrostatico.

Ora il minimo valore di $\frac{\Delta t}{2}$ si ha quando è t_i positivo e t_e negativo, cioè quando la differenza di temperatura è massima fra le due facce, essendo la faccia a valle a temperatura più alta di quella a monte.

Occorre quindi considerare i massimi estivi a lago pieno perchè allora a monte avremo la temperatura dell' acqua che è in genere anche più bassa della temperatura media a cui si può supporre eseguita la costruzione, e a valle si realizza invece la più alta temperatura atmosferica.

In questo caso il valore del termine $t_0 \frac{h}{r} \mu_i'$ risulta anche meno importante perchè essendo $t_0 = \frac{t_e + t_i}{2}$, e t_e e t_i di senso contrario, il suo valore assoluto è minore del valore assoluto di $\frac{\Delta t}{2}$.

Se trascuriamo addirittura il termine $t_0 \frac{h}{r} \mu_i'$ e poniamo quindi:

$$\varsigma_i' = -E\alpha \frac{\Delta t}{2},$$

risulterà ς_i' indipendente dalla temperatura di costruzione ma solo dipendente dalla massima differenza Δt di temperatura realizzabile in estate fra monte e valle.

Poichè lo sforzo totale all' intradosso di imposta non deve superare il carico di sicurezza k a compressione, si ha:

$$k = p\left(\frac{r}{h} + \mu_i'\right) - E\alpha \frac{\Delta t}{2}$$

ovvero, ponendo:

(2) $$k_1 = k + E\alpha \frac{\Delta t}{2}$$

si ha:

$$k_1 = p\left(\frac{r}{h} + \mu_i'\right)$$

Questa formula è perfettamente analoga a quella presa a base dell'analisi fatta al Cap. II, solo che al posto del carico di sicurezza k, è sostituito il termine $k + E\alpha\frac{\Delta t}{2}$. Ma questo termine è calcolabile a priori perchè non dipende nè dalla forma nè dalle dimensioni dell'arco; per cui tutto ciò che si è detto al Cap. II, vale, con sufficiente approssimazione, anche per quanto riguarda l'effetto complessivo della pressione idrostatica e delle temperature, purchè si assuma un carico fittizio di sicurezza inferiore al reale della quantità $-E\alpha\frac{\Delta t}{2}$, in cui Δt è la massima differenza negativa di temperatura fra monte e valle a lago pieno.

Per i nostri climi potendo ritenersi in media di 10° la temperatura massima dell'acqua in un lago montano di qualche importanza, e di 30° la massima temperatura atmosferica, si può porre $\frac{\Delta t}{2} = -10$ e quindi:

$$k_1 = k - 10 \cdot E\alpha.$$

Per un calcestruzzo di cemento, con $E = 200.000\ ^{kg}/_{cmq}$ e $\alpha = 0{,}000\,013$, si ha, per $\frac{\Delta t}{2} = 10$:

$$k_1 = k - 26\ ^{kg}/_{cmq}$$

da cui si vede la grande influenza che vengono ad assumere gli sforzi dovuti alle variazioni di temperatura, calcolati con i criteri oggi in uso.

Se infatti il carico di sicurezza k si tiene eguale a $40^{kg}/_{cmq}$, risulterà $k_1 = 14$, cioè circa un terzo di k.

Se p. es. $2\varphi_0 = 180°$, $p = 1^{kg}/_{cmq}$, (corrispondente al carico idrostatico di m. 10), sappiamo (Cap. II, form. 5 e Tab. V) che:

$$\frac{r}{h} = k - 2{,}69$$

e quindi, sempre per $k = 40^{kg}/_{cmq}$:

$$h = \frac{r}{37{,}31}$$

se non si tien conto della temperatura; mentre:

$$h_1 = \frac{r}{11{,}31}$$

se se ne tiene conto. In questo caso, come si vede, lo spessore diventa più che triplo di quello che sarebbe sufficiente per resistere alla pressione idrostatica!

Questo risultato, certamente eccessivo, giustifica la incredulità di molti costruttori circa il completo affidamento che possa farsi sulle formule teoriche.

3. — Del termine $t_0 \frac{h}{r} \mu'_i$ che abbiamo trascurato, si può, volendo, tener conto nel modo seguente.

Ricordando che:

$$\frac{h}{r} \mu'_i = \frac{\mu'_i}{\eta}$$

i valori di $\frac{\mu'_i}{\eta}$ sono stati calcolati e riportati nella Tab. IX, a pag. 104, per valori di $2\varphi_0$ da 180^0 a 50^0, e per valori di η compresi fra 5 e 40 fino a $2\varphi_0 = 120^0$, e fra 4 e 20 per $2\varphi_0 < 120^0$.

La (1) allora si scrive:

$$\varsigma'_i = -E\alpha\left[\frac{\mu'_i}{\eta} t_0 + \frac{\Delta t}{2}\right] \tag{3}$$

e quindi:

$$k = p\left(\frac{r}{h} + \mu'_i\right) - E\alpha\left[\frac{\mu'_i}{\eta} t_0 + \frac{\Delta t}{2}\right]$$

Si può ancora porre come nel caso precedente:

$$k_1 = p\left(\frac{r}{h} + \mu'_i\right)$$

purchè si tenga:

$$k_1 = k + E\alpha\left[\frac{\mu'_i}{\eta} t_0 + \frac{\Delta t}{2}\right] \tag{4}$$

Il calcolo può allora procedere come è detto al Cap. II. assumendo un carico di sicurezza dato dalla (4), nella quale si sia posto per $\frac{\mu'_i}{\eta}$ un valor medio approssimativo, suggerito dalla Tab. IX, e per t_0 e $\frac{\Delta t}{2}$ i valori corrispondenti

ad una ipotesi di variazioni di temperature, che dia per la quantità in parentesi un valore negativo e di valore assoluto quanto più è possibile alto.

Eseguito il calcolo si verifica se il valore di $\frac{\mu_i}{\eta}$ che ne risulta è abbastanza vicino a quello assunto, e se ciò non è si procede ad un calcolo di seconda approssimazione.

Si abbia per esempio da studiare una diga ad archi multipli di 15 m. di altezza, e con materiale per cui sia $k = 40\,{}^{kg}/_{cmq}$ ossia 400 Ton. a mq., $E\alpha = 2{,}5$.

Si può prevedere un valore di $k_1 = 15 \div 20\,{}^{kg}/_{cmq} = 150 \div 200$ Ton. a mq. e quindi un $\frac{k_1}{A} = 10 \div 13$.

Uno sguardo al diagramma della fig. 8 a pag. 67, mostra che l'angolo $2\varphi_0$ più conveniente è intorno a 160°, per cui [form. (5) e Tab. V, Cap. II.]:

$$\eta = \frac{k}{p_e} - 3{,}44$$

Per l'anello di fondo si avrà dunque $\eta = 7 \div 10$ circa, e dalla Tab. IX a pag. 104, si ha $\frac{\mu'_i}{\eta} = 0{,}3$ circa; se in sommità sarà $\eta = 20$, ivi sarà $\frac{\mu'_i}{\eta} = 0{,}15$.

Si potrà quindi assumere il valor medio:

$$\frac{\mu'_i}{\eta} = 0{,}22$$

Supponiamo che, fra le varie, la ipotesi più sfavorevole per le temperature sia per: $t_0 = +5$, $\frac{\Delta t}{2} = -10$; si avrà:

$$k_1 = k + 2{,}5\ (0{,}22 \times 5 - 10)$$

cioè:

$$k_1 = 40 - 22 = 18\,{}^{kg}/_{cmq}$$

che è proprio nei limiti previsti.

4. — Una volta fissata l'ampiezza $2\varphi_0$ più conveniente, come si è detto innanzi, può convenire di avere una for-

mula semplice per il calcolo dello spessore di ogni anello, o del rapporto η, tenendo conto anche delle temperature, benchè il metodo di successiva approssimazione con l'aiuto della (4) e della Tab. IX, sia sufficientemente rapido ed esatto.

TABELLA IX.

$2\varphi_0$	Valori di $\frac{\mu'_i}{\eta}$							
	per $\eta = 4$	per $\eta = 5$	per $\eta = 7{,}5$	per $\eta = 10$	per $\eta = 15$	per $\eta = 20$	per $\eta = 30$	per $\eta = 40$
180°	—	0,400	0,277	0,210	0,141	0,107	0,071	0,053
170°	—	0,460	0,321	0,245	0,165	0,124	0,083	0,062
160°	—	0,530	0,373	0,285	0,193	0,146	0,098	0,073
150°	—	0,609	0,434	0,334	0,227	0,176	0,115	0,086
140°	—	0,699	0,506	0,392	0,267	0,202	0,136	0,102
130°	—	0,801	0,591	0,461	0,318	0,241	0,162	0,122
120°	—	0,913	0,692	0,546	0,377	0,288	0,194	0,147
110°	1,124	1,037	0,814	0,652	0,455	0,350	—	—
100°	1,192	1,138	0,935	0,765	0,545	0,421	—	—
90°	1,241	1,243	1,091	0,920	0,672	0,525	—	—
70°	1,070	1,226	1,323	1,244	1,000	0,818	—	—
50°	0,451	0,695	1,136	1,370	1,535	1,365	—	—

Col solito metodo di interpretazione delle funzioni che si presentano sotto forma troppo complicata, si può porre:

$$\frac{\mu'_i}{\eta} = \frac{c}{\eta + b} \tag{5}$$

che unitamente alla (5) del Cap. II, permette di scrivere:

$$k = p_e(\eta + a) - E\alpha\left(\frac{c}{\eta + b}\, t_0 + \frac{\Delta t}{2}\right) \tag{6}$$

da cui, dopo riduzioni:

$$\begin{aligned} p_e\eta^2 - \left\{\left[k - ap_e + E\alpha\frac{\Delta t}{2}\right] - bp_e\right\}\eta - \\ - \left\{\left[k - ap_e + E\alpha\frac{\Delta t}{2}\right] b + E\alpha c t_0\right\} = 0 \end{aligned} \tag{7}$$

equazione di secondo grado da cui è facile ottenere il valore di $\eta = \frac{r}{h}$ e quindi h, per ogni anello. I valori di a sono stati già calcolati al Cap. II; i valori di b e c si determinano al solito col metodo dei minimi quadrati, servendosi dei dati della Tab. IX.

Quì sotto, nella Tab. X, sono raccolti i valori di a, già dati nella Tab. V, unitamente a quelli di b e c, per $2\varphi_0$ variabile da 180° a 120°.

Per valori inferiori a 120° la (7) non è applicabile perchè darebbe approssimazione troppo grossolana.

TABELLA X.

$2\varphi_0 =$	180	170	160°	150°	140°	130°	120°
a	2,69	3,05	3,44	3,91	4,45	5,07	5,80
b	0,30	0,42	0,58	0,68	0,84	1,12	1,41
c	2,16	2,53	3,00	3,56	4,20	5,06	6,12

Per mostrare con un esempio l'uso della (7), assumiamo i dati presi dal Guidi per un esempio numerico nella sua *Statica delle Dighe*.

Sia cioè:

$$p_e = 1{,}5 \quad ; \quad 2\varphi_0 = 150^0 \quad ; \quad E\alpha = 1{,}35$$

$$t_0 = 5 \quad ; \quad \frac{\Delta t}{2^e} = -10$$

Il Guidi calcola il massimo σ'_i che risulta di Kg. 36,4. Ponendo nella (7), $k = 36{,}4$, con calcolo diretto si ha:

$$1{,}5\,\eta^2 - 16{,}015 \cdot \eta - 41{,}065 = 0$$

da cui:

$$\eta = 12{,}81$$

mentre il Guidi era partito dal valore:

$$\eta = 12{,}50$$

L'errore è del 2,5 %, ma occorre considerare che il metodo è sempre più esatto di quello di verifica.

Infatti assunto $k = 40^{kg}/_{cmq}$ e $\eta = 12{,}50$ il calcolo di verifica dà $\sigma'_i = 36{,}4$. Questo risultato si ritiene normalmente soddisfacente se k si può tenere, per esempio, eguale a $40^{kg}/_{cmq}$, e non si procede in genere ad un nuovo calcolo per approssimare meglio il valore di σ'_i al valore di k. Ci contenteremmo allora di una approssimazione di $\frac{40 - 36{,}4}{40}$ cioè del 9 %.

5. — Fattori che limitano gli sforzi dovuti a variazioni termiche. — L' effetto termico, valutato nel modo che si è finora esposto, conduce, come si è già osservato, a valori eccessivi degli sforzi unitari.

La causa di questa differenza fra i risultati teorici e la realtà fisica del fenomeno, sta, a mio vedere, principalmente in due fattori: il primo di essi consiste nella differenza sostanziale — per quanto riguarda il rapporto fra causa agente e deformazione — che sussiste fra gli effetti del carico e quelli delle dilatazioni o contrazioni termiche; il secondo fattore sta nel fatto che la reale distribuzione delle temperature nell'interno di una massa muraria non può, senza pericolo di incorrere in errori sensibili, assumersi uniforme o variabile con legge lineare.

La deformazione prodotta dalle forze esterne che gravano su una costruzione, non ha in genere che una trascurabile influenza sulla posizione e sull'intensità di esse forze, perchè anche dopo che la deformazione si è compiuta le forze esterne continuano ad insistere sulla struttura con la stessa grandezza di prima, ed il loro punto di applicazione si è spostato insensibilmente se le deformazioni del sistema sono piccole.

Ma diverse sono le cose per i cambiamenti di temperatura. A misura infatti che la deformazione dovuta ad una dilatazione termica si effettua, essa deformazione modifica sensibilmente la forza agente, al punto che se la deformazione può avvenire liberamente, gli sforzi interni che la accompagnano sono nulli.

Ora le imposte di un arco non sono assolutamente rigide, come noi supponiamo, e quindi il cedimento elastico delle

spalle e la rotazione della sezione di imposta, non sono perfettamente nulli. A ciò si aggiunga che in una costruzione muraria esistono quasi sempre dei punti in cui movimenti piccolissimi possono avvenire e provocare dei leggerissimi cedimenti permanenti (*rassetti*) sotto l'azione di forze agenti.

La ipotesi quindi della assoluta indeformabilità delle sezioni estreme di un arco, come si considera quando si tratta l' arco stesso come trave perfettamente incastrata agli estremi, mentre è ammissibile senza pratico errore per il calcolo degli sforzi dovuti ai carichi esterni (pressione, spinta idrostatica, ecc.), non è più accettabile nel caso degli sforzi termici. Ogni cedimento elastico o permanente delle imposte, ogni rassetto in un punto qualunque dell' arco, permette una parziale libera dilatazione della struttura e conseguentemente una corrispondente diminuzione degli sforzi interni dovuti alla temperatura.

Il fenomeno è analogo a quello che si verifica nel caso di vincoli non perfettamente realizzati nelle travi rettilinee incastrate agli estremi. La parziale rotazione delle sezioni di incastro modifica sensibilmente la ripartizione degli sforzi interni, tanto che in molti casi si deve ricorrere alla ipotesi arbitraria del semi-incastro.

Non è certamente agevole mettere in evidenza l'entità della riduzione che l' effetto suddetto apporta nel valore degli sforzi termici, tanto più che un tale fattore sfugge ad ogni analisi rigorosa.

Si può solo, analogamente a quanto si fa in qualche altro caso simile, ritenere che le sollecitazioni interne, per effetto del fenomeno suaccennato, si possono ridurre proporzionalmente moltiplicandole per un coefficiente χ, minore dell'unità. Il valore da scegliere per tale coefficiente varia da caso a caso, ma non può determinarsi con considerazioni teoriche. Una larga serie di ricerche sperimentali su costruzioni esistenti solamente potrebbe dare delle utili indicazioni in proposito, misurando direttamente [1]) gli sforzi interni e paragonandoli con quelli teorici, in casi semplici

---

[1]) In proposito può essere utile il metodo ideato dall'Ing. L. Kambo e già innanzi citato.

per i quali questi ultimi possano determinarsi con sufficiente rigore. In attesa, converrà tenere $\chi = 1$, rinunciando pel momento a tener conto di questo coefficiente di riduzione degli sforzi, oppure assumere χ alquanto inferiore all'unità, ma con criteri molto prudenziali.

Il secondo fattore indicato innanzi riguarda la differenza che passa fra la reale distribuzione delle temperature nello interno di una diga, (ed in particolare di una diga ad arco), e le distribuzioni uniforme e lineare, che sono state finora considerate.

Prima però di studiare quale possa essere la distribuzione effettiva delle temperature occorre chiederci come si potranno determinare gli sforzi interni quando fosse nota la variazione di temperatura in ogni punto della diga.

6. — Calcolo degli sforzi interni prodotti da una distribuzione qualunque delle temperature. — Poichè in una diga ad arco lo spessore è relativamente piccolo rispetto alle altre dimensioni, e poichè è necessario, per l'analisi di un così complesso problema, prescindere dalle perturbazioni locali dovute a cause diverse (parziale insolazione di una faccia, influenza del contorno, ecc.), supporrò che in ogni istante la temperatura sia eguale in ogni punto della faccia a monte, e similmente in ogni punto della faccia a valle, per una zona della diga di sufficiente altezza. Considerando un anello intermedio di questa zona, potremo ritenere, senza grande errore, trascurabile ogni trasmissione di calore sulla faccia superiore ed inferiore e sulle superficie estreme di imposta.

La propagazione termica avverrà allora secondo linee normali ai paramenti, e le superficie isotermiche saranno superficie parallele ai paramenti stessi.

La distribuzione delle temperature sarà la stessa sopra ogni retta normale alle facce esterne e sarà caratterizzata dalla nota equazione differenziale alle derivate parziali:

$$\frac{\partial^2 t}{\partial x^2} = \frac{\rho c}{K} \cdot \frac{\partial t}{\partial \tau} \tag{8}$$

dove t è la temperatura, τ il tempo, x la coordinata di

una superficie isotermica, misurata mediante la sua distanza normale da una isotermica fissa; ρ la densità, c il calore specifico e K la conduttività specifica interna della sostanza costituente la diga.

La integrazione della (8), tenuto conto delle condizioni ai limiti, darebbe nei singoli casi la legge di distribuzione interna delle temperature.

Se questa distribuzione è uniforme, essa genera, come si è detto al Cap. I, una reazione parallela alla corda dell'arco, ed agente nel baricentro elastico di esso. Tale reazione vale:

$$H_t = E \alpha t_0 \frac{h^3}{6 \mathfrak{J} r^2} \tag{9}$$

Se la distribuzione lungo la normale ai paramenti varia con legge lineare, il Guidi ha mostrato che alla reazione (9), dove t_0 è il valor medio dell' aumento di temperatura, si aggiunge un momento:

$$\mathfrak{M} = E \alpha \frac{\Delta t}{12} h^2 \tag{10}$$

dove Δt è la differenza di temperatura fra le due facce.

Per una qualsiasi altra legge questa analisi è impossibile, non potendosi ritenere mantenuta la conservazione delle sezioni piane.

Il Ritter afferma, come è intuitivo, che la reazione totale prodotta da una distribuzione qualunque lungo la normale alle facce, è una forza sempre parallela alla corda dell'arco, proporzionale all'area del diagramma rappresentante la distribuzione stessa, ed agente ad una distanza dal baricentro, che cresce col crescere della disuniformità della distribuzione; ma non dà il modo di calcolarla.

Allo scopo di avere un mezzo di indagine atto a determinare gli sforzi interni in ogni caso, propongo il metodo seguente, che senza avere la pretesa di essere rigoroso, può tuttavia riuscire di grande aiuto nella pratica.

Si abbia (fig. 11) l'arco $ABCD$ di raggio medio r, spessore h, ampiezza $2\varphi_0$, ed altezza eguale ad uno. In esso si consideri una fibra circolare PQ, distante radialmente di x dalla fibra media MN, e di spessore infinitesimo dx.

Se la temperatura di tutto l'arco aumenta di t^0, la se-

zione *AB*, come si è detto a suo tempo, tenderebbe a spostarsi parallelamente a sè stessa, essendo fissa la sezione *CD;* ma lo spostamento essendo impedito dal vincolo dell' incastro, si genera la reazione H_t, espressa dalla (9), agente nel baricentro *G* dell'arco.

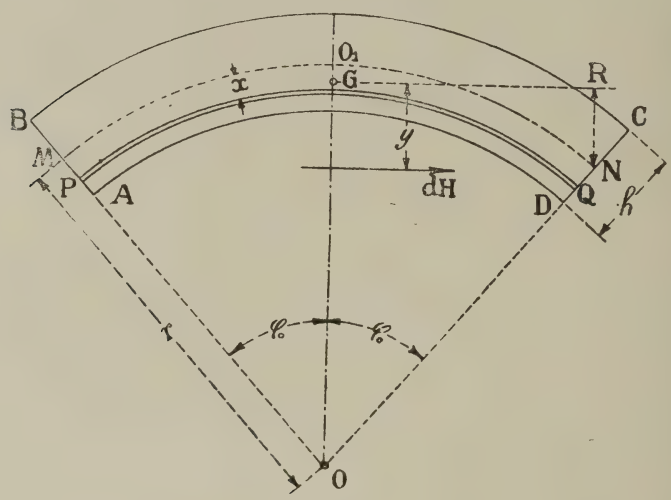


Fig. 11

Se però l'aumento di temperatura si pensi idealmente limitato alla fibra *PQ*, si avrà sempre, per la solidarietà di detta fibra con tutto l'arco, una tendenza ad una deformazione della intera sezione *AB* [1]), e si genererà quindi una reazione, che, per la simmetria dell' arco, deve essere normale a *GO*, ma la cui grandezza sarà *dH*.

È logico ammettere che tale reazione stia alla precedente nel rapporto in cui sta lo spessore della fibra *PQ* allo spessore *h* di tutta la volta [2]).

---

[1]) Non diversamente accade in un prisma retto poggiato su un piano resistente e sollecitato da una forza concentrata in un punto della base superiore. La sola fibra corrispondente a questo punto è sollecitata direttamente ma la sezione di appoggio è impegnata tutta intera alla resistenza, con una distribuzione di forze unitarie che, se il prisma è abbastanza alto, è sensibilmente uniforme.

[2]) Più esatto sarebbe assumere le reazioni proporzionali ai volumi

Sarà cioè:

$$\frac{dH}{dx} = \frac{H_t}{h}$$

da cui, per la (9):

$$dH = E\alpha t \frac{h^2}{6\Im r^2} \cdot dx \tag{11}$$

Ciò equivale in fondo a supporre che l'arco *ABCD* si riduca ad un arco sottilissimo *PQ*, il quale abbia però la rigidezza dell'arco primitivo.

La forza *dH* non sarà applicata nel baricentro *G*, ma ne disterà tanto più, quanto maggiore sarà la distanza radiale x della fibra *PQ* dalla fibra media, e nello stesso senso.

Detta y la distanza di *dH* da *G*, è ignota la dipendenza fra y ed x.

Possiamo ammettere che ci sia proporzionalità e che sia quindi:

$$y = cx \tag{12}$$

Le ipotesi (11) e (12) sono tali da permettere la ricerca della spinta complessiva *H* e della sua posizione per qualsiasi distribuzione delle temperature.

Nota infatti la funzione $t(x)$, sarà:

$$\begin{cases} H = \dfrac{E\alpha h^2}{6\Im r^2} \cdot \displaystyle\int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} t\,dx \\[2ex] \mathfrak{M} = HY = \displaystyle\int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} y\,dH = \dfrac{E\alpha h^2}{6\Im r^2} \displaystyle\int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} t\,y\,dx \end{cases}$$

---

della fibra *PQ* e dell'intero anello, poichè ad essi volumi è proporzionale la deformazione dovuta alla dilatazione termica. Con la ipotesi fatta si trascura la differenza di lunghezza fra le diverse fibre, ciò che si può fare per valori di $\frac{r}{h}$ piuttosto grandi come si realizzano in pratica.

essendo Y la distanza della spinta totale H dal baricentro G, ed $\mathfrak{M}$ il momento di H rispetto a G.

In particolare per la distribuzione uniforme, e per quella lineare con valor nullo sulla fibra media, si dovranno ritrovare le (9) e (10).

La (9) è identicamente verificata; per la (10), osservando che:

$$t = \frac{\Delta t}{h} x$$

si ha:

$$H = 0$$

$$\mathfrak{M} = \frac{E \alpha h^2}{6 \vartheta r^2} \cdot \frac{\Delta t}{h} c \int_{-\frac{t}{2}}^{+\frac{t}{2}} x^2 dx = \frac{E \alpha h^2}{6 \vartheta r^2} \cdot \frac{\Delta t}{h} \cdot c \cdot \frac{h^3}{12}$$

Ponendo questo valore di $\mathfrak{M}$ eguale a quello dato dalla (10) si può determinare il coefficiente c. Si ottiene così:

$$c = \frac{6 \vartheta r^2}{h^2}$$

e quindi:

$$y = \frac{6 \vartheta r^2}{h^2} x$$

Ricordando che (form. (8'''), Cap. I):

$$6 \vartheta = C_1 + \frac{h^2}{r^2} C_2$$

e che:

$$\frac{r}{h} = \eta$$

si può scrivere definitivamente:

$$(13) \qquad \begin{cases} dH = E \alpha \dfrac{h^2}{6 \vartheta r^2} \cdot t dx = \dfrac{E \alpha}{C_1 \eta^2 + C_2} \cdot t dx \\ y = \dfrac{6 \vartheta r^2}{h^2} \cdot x = (C_1 \eta^2 + C_2) x \end{cases}$$

Integrando le (13), e chiamando S, ζ, $M_s = S\zeta$, rispettivamente l'area $ABQT$ (fig. 12) del diagramma della distribuzione radiale delle temperature; la distanza del bari-

centro P di questa area dall'asse medio Mt; ed il momento statico del diagramma rispetto all'asse medio Mt; si ha:

$$
(14) \qquad \left\{
\begin{aligned}
H &= E\alpha \frac{h^2}{6\vartheta r^2} \cdot S = \frac{E\alpha S}{C_1\eta^2 + C_2} \\
Y &= \frac{6\vartheta r^2}{h^2} \cdot \zeta = (C_1\eta^2 + C_2)\,\zeta \\
\mathfrak{M} &= HY = E\alpha \cdot M_s = E\alpha S\zeta
\end{aligned}
\right.
$$

La ζ e la Y si intendono positive se P cade al disopra dell'asse medio Mt e per conseguenza H al disopra del baricentro elastico G dell'arco.

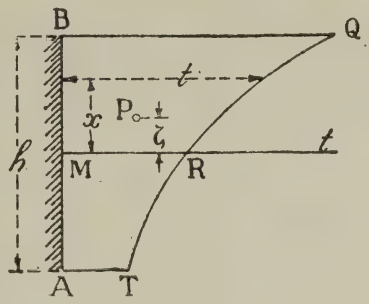


Fig. 12

Con i valori di H ed Y dati dalle (14) è facile scrivere le espressioni degli sforzi unitari massimi nella sezione di chiave ed in quella di imposta.

Ricordando che le distanze del baricentro elastico G dai centri delle sezioni di chiave e di imposta (figura 11), valutate parallelamente all'asse OG, sono:

$$
GO_1 = \left(1 - \frac{\operatorname{sen}\varphi_0}{\varphi_0}\right) r
$$

$$
RN = \left(\frac{\operatorname{sen}\varphi_0}{\varphi_0} - \cos\varphi_0\right) r = C_5 r
$$

si avrà per la sezione di chiave:

$$
\left\{
\begin{aligned}
\varsigma_e &= -6\,\frac{\left(1 - \frac{\operatorname{sen}\varphi_0}{\varphi_0}\right) r - \frac{h}{6} - Y}{h^2}\,H \\
\varsigma_i &= 6\,\frac{\left(1 - \frac{\operatorname{sen}\varphi_0}{\varphi_0}\right) r + \frac{h}{6} - Y}{h^2}\,H
\end{aligned}
\right.
$$

Se ora poniamo ancora:

$$(15)\qquad \begin{cases} \dfrac{S}{h} = t_0 = \textit{temperatura media} \\[2ex] \dfrac{\zeta}{h} = \varepsilon = \textit{eccentricità della distribuzione} \end{cases}$$

si otterrà, con facile calcolo e tenendo presenti le (14):

$$\begin{cases} \varsigma_e = -E\alpha t_0 \left\{ \dfrac{1}{\vartheta} \left[\left(1 - \dfrac{\operatorname{sen}\varphi_0}{\varphi_0}\right) - \dfrac{h}{6r} \right] \cdot \dfrac{h}{r} - \varepsilon \right\} \\[2ex] \varsigma_i = \quad E\alpha t_0 \left\{ \dfrac{1}{\vartheta} \left[\left(1 - \dfrac{\operatorname{sen}\varphi_0}{\varphi_0}\right) + \dfrac{h}{6r} \right] \cdot \dfrac{h}{r} - \varepsilon \right\} \end{cases}$$

e poi, per le (8′) del Cap. I:

$$(16)\qquad \begin{cases} \varsigma_e = -E\alpha t_0 \left(\mu_e \dfrac{h}{r} - \varepsilon\right) \\[2ex] \varsigma_i = \quad E\alpha t_0 \left(\mu_i \dfrac{h}{r} - \varepsilon\right) \end{cases}$$

Analogamente, per la sezione di imposta si ottiene:

$$(16')\qquad \begin{cases} \varsigma'_e = \quad E\alpha t_0 \left(\mu'_e \dfrac{h}{r} + \varepsilon\right) \\[2ex] \varsigma'_i = -E\alpha t_0 \left(\mu'_i \dfrac{h}{r} + \varepsilon\right) \end{cases}$$

Le (16) e (16′) risultano perfettamente identiche alle formule date dal Guidi, e riportate al Cap. I, form. (11).

La temperatura media è sempre indicata con t_0, ed al termine $\dfrac{\Delta t}{2}$ si è sostituito il termine:

$$\varepsilon t_0 = \frac{t_0 \zeta}{h} = \frac{S\zeta}{h^2} = \frac{M_s}{h^2}$$

che caratterizza la disuniformità della distribuzione termica. L'ultima espressione del valore εt_0 serve al calcolo quando fosse $t_0 = 0$.

Le (16) e (16′) sono una generalizzazione delle formule del Guidi e danno gli sforzi unitari prodotti da una qualunque distribuzione delle temperature.

È notevole osservare che se la distribuzione delle temperature è simmetrica rispetto la fibra media dell'arco, essa produce sforzi equivalenti ad una distribuzione uniforme di grandezza $t_o = \frac{S}{h}$.

Questo teorema era stato già intuito da H. Ritter (op. cit.), ed è di grande utilità nel calcolo degli sforzi termici a serbatoio vuoto.

7. — Variazione della temperatura esterna alla diga. — Avendo apprestato le formule necessarie al calcolo degli sforzi interni per distribuzioni non lineari delle temperature, ci conviene riprendere l'esame della equazione differenziale fondamentale:

$$\frac{\partial^2 t}{\partial x^2} = \frac{\rho c}{k} \frac{\partial t}{\partial \tau} \tag{8}$$

Se le due facce della diga si mantengono per ipotesi a temperature costanti e diverse per un tempo indefinito, la distribuzione delle temperature tenderà asintoticamente ad uno stato di regime nel quale la temperatura in ogni punto interno non dipenderà più dal tempo. Sarà cioè:

$$\frac{\partial t}{\partial \tau} = 0 .$$

e quindi:

$$\frac{\partial^2 t}{dx^2} = 0 .$$

che integrata dà:

$$t = a\,x + b$$

dove a e b si determinano agevolmente con le condizioni limiti.

È questa la distribuzione lineare studiata dal Guidi.

Ma per quanto è stato ora detto questa distribuzione può ammettersi solo quando il tempo, durante il quale si sieno mantenuti i paramenti a temperatura costante, sia tanto lungo da rendere trascurabili le differenze fra i valori effettivi delle temperature e quelli dello stato di regime a cui tendono asintoticamente.

In realtà le temperature sulle facce della diga oscillano in modo variabilissimo. Il problema tuttavia deve essere studiato riducendo a schemi analitici le variazioni termiche esterne.

Per quanto riguarda la temperatura atmosferica possiamo considerarla come risultante:

a) di una oscillazione a periodo giornaliero con andamento sinusoidale;

b) di una oscillazione a periodo annuo con andamento pure sinusoidale;

c) di perturbazioni più o meno sensibili delle dette oscillazioni periodiche.

Per quanto riguarda la temperatura dell'acqua costituente il lago artificiale essa può considerarsi, per la sua grande massa e per il grande calore specifico, costante durante il periodo giornaliero ed oscillante per il periodo annuo, ma con ampiezza di oscillazione molto limitata.

È impossibile trattare il problema nella sua complessità, ed occorre perciò fermarsi ai casi tipici più semplici, sufficienti, come si vedrà, a dare le indicazioni pratiche che ci occorrono.

Trascurerò perciò le perturbazioni di cui al capoverso *c)* e riterrò inoltre costante la temperatura dell'acqua anche nel periodo annuale. Quest'ultima approssimazione è giustificata dalla piccola variazione annuale della temperatura dell'acqua rispetto a quella dell'aria, specialmente ad una certa profondità.

Considererò quindi il caso tipico del serbatoio pieno, nella ipotesi di una temperatura costante a monte e variabile a valle con legge sinusoidale, e quello del serbatoio vuoto, nella ipotesi di temperature eguali sulle due facce in ogni istante, e variabili entrambe nel tempo con legge sinusoidale.

Per ognuna delle due ipotesi studierò la oscillazione giornaliera e quella annuale, ammettendo il principio della sovrapposizione degli effetti per valutare la concomitanza delle due oscillazioni.

Questo principio non è in genere applicabile a problemi come quello in esame, ma può essere accolto nel caso spe-

cifico per la grande differenza di periodo esistente fra le due oscillazioni.

La messa in carica del serbatoio complica il fenomeno, perchè la faccia a monte si trova alternativamente esposta alla temperatura dell'aria e dell'acqua. È chiaro però, specie per il fatto che la temperatura dell' acqua varia in limiti ristretti e piuttosto prossimi alle medie annuali, che la effettiva distribuzione interna delle temperature non potrà essere che intermedia fra i casi limiti che considereremo, cioè quello del serbatoio pieno e quello del serbatoio vuoto.

Nella equazione fondamentale (8) entrano tre parametri caratteristici del materiale di cui è costrutta la diga, e cioè il peso specifico, il calore specifico ed il coefficiente di trasmissione interna del calore.

Il primo è facilmente determinabile caso per caso, e del resto i suoi valori sono noti per i materiali solitamente usati.

Il calore specifico è di determinazione più difficile, però esso varia in limiti molto ristretti da un materiale di costruzione all'altro; può anzi quasi ritenersi che sia costante.

Il coefficiente K di trasmissione interna invece è non solo variabilissimo da un corpo ad un altro, ma per la stessa sostanza varia con la condizione di aggregazione, di umidità, di temperatura, ecc. Inoltre la sua determinazione offre difficoltà non lievi.

Questa determinazione è ancora più ardua per i materiali non omogenei, — come ad es. i calcestruzzi, — dipendendo il coefficiente K che compete a tutta la massa, non solo dal suo valore per i singoli costituenti, e dalle loro proporzioni, ma anche dal modo come sono uniti, dalla quantità dei vuoti, ecc.

Riporto qui di seguito, assieme ai valori di ρ e c i valori di K determinati per diverse sostanze dall'ing. Richard Poensgen [1]), sperimentando nel Politecnico di Monaco su lastre di diverso spessore.

Per altri materiali riporto i dati ottenuti da diversi

---

[1]) Zeitschrift des Vereines deutscher Ingenieure, 12 ottobre 1912.

sperimentatori, segnandoli con un asterisco per distinguerli dai precedenti.

I valori sono dati assumendo, come farò in tutta la trattazione di questo argomento, per unità di lunghezza il decimetro, di peso il chilogramma, di tempo l'ora, di temperatura il grado centesimale.

TABELLA XI.

	Temp. a cui si è sperim.	Densità	Coefficiente di trasmissione termica	Calore specifico
* Calcare a grana fina	—	2,60	0,170	0,21
* Calcare a grana grossa	—	2,50	0,130	0,21
* Granito e Guliss	—	2,70	0,220	0,20
Arenaria calcarea a grana grossa	25° 40°	2,00	0,080 0,085	0,22
Arenaria calcorea a grana minuta	25° 40°	1,66	0,059 0,062	0,21
Arenaria silicea umida	20° 40°	2,26	0,144 0,158	0,21
Idem. secca	20° 30°	2,25	0,111 0,114	—
Muratura vecchia di mattoni	29° 47°	1,85	0,035 0,038	0,21
Calcestruzzo con Kg. 400 di cemento per mc., dopo sei mesi di stagionatura	20° 23°	2,18	0,065 0,066	0,21
Calcestruzzo con Kg. 190 di cemento per mc., dopo 15 giorni di stagionatura.	20° 30° 40°	2,05	0,070 0,072 0,074	0,21

8. — Distribuzione delle temperature a serbatoio pieno. — Nel caso in parola, mentre nella faccia a monte la temperatura è costante, su quella a valle varia con legge sinusoidale intorno ad un valor medio, che, senza nulla togliere alla generalità del problema, potremo supporre eguale a zero.

Si avrà cioè, se T_e è la semiampiezza della oscillazione e Θ il periodo:

$$t_e = T_e \operatorname{sen} \frac{2\pi}{\Theta} \tau \tag{17}$$

Possiamo ritenere che la temperatura a monte sia eguale a quella media a valle, cioè anche eguale a zero.

Se lo spessore della diga fosse infinitamente grande la (8) avrebbe come integrale generale la funzione:

$$t = T_e e^{-\sqrt{\frac{\pi}{\Theta} \frac{\rho c}{K}} \cdot x} \operatorname{sen} \left[\frac{2\pi}{\Theta} \tau - \sqrt{\frac{\pi}{\Theta} \frac{\rho c}{K}} \cdot x \right] \tag{18}$$

che esprime la legge delle oscillazioni smorzate.

La temperatura t in un punto distante x dal paramento a valle, oscilla con legge parimenti sinusoidale, e di egual periodo, ma al crescere della distanza x l'ampiezza decresce con andamento esponenziale e la fase ritarda con variazione lineare.

La (18) può essere adottata con sufficiente approssimazione anche nel caso di spessore limitato, come si verifica nelle costruzioni di dighe.

Ciò equivale a trascurare l'ampiezza di oscillazione data dalla (18) alla distanza $x = h$ dalla faccia a valle, cioè in corrispondenza al paramento a monte della diga.

Come vedremo fra poco, questa ampiezza è senz' altro trascurabile per oscillazioni diurne, e per quelle annuali la ipotesi fatta riesce, come vedremo, a favore della stabilità.

Adottando la legge (18), occorre calcolare il valore del parametro:

$$\lambda = -\sqrt{\frac{\pi}{\Theta} \cdot \frac{\rho c}{K}} \tag{19}$$

Osservando che le strutture delle dighe sono quasi senza eccezione in calcestruzzo di cemento, o muratura così detta « bloccata », con malta di cemento, e che il tenore di questo ultimo, per assicurare la impermeabilità della costruzione e

per ottenere una resistenza rilevante, è sempre elevato, si può ritenere:

$$\rho = 2{,}2 \qquad c = 0{,}21 \qquad K = 0{,}065$$

e quindi, per l'oscillazione diurna:

$$\lambda = -\sqrt{\frac{3{,}14}{24} \cdot \frac{2{,}2 \times 0{,}21}{0{,}065}} = -0{,}964$$

Possiamo senz' altro tenere:

$$\lambda = -1$$

e quindi:

$$(20) \qquad \begin{cases} t = T_e\, e^{-x} \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{12} \cdot \tau - x\right) \\ T_x = T_e\, e^{-x} \\ x = \log.\frac{T_e}{T_x} \end{cases}$$

essendo T_x l'ampiezza della oscillazione termica corrispondente alla distanza x dalla faccia a valle.

È facile determinare a che distanza dalla faccia a valle si può ritenere trascurabile l' effetto della variazione giornaliera della temperatura esterna.

Ammesso che essa oscilli da $+10^0$ a -10^0, intorno al valore medio, assunto eguale a zero, sarà $T_e = 10$; e se trascuriamo, agli effetti pratici, una oscillazione di un grado in più o in meno della media, si potrà ritenere che il fenomeno termico diurno si spenga ad una profondità:

$$x = \log.\, 10 = 2{,}3 \text{ dcm.} = \text{m. } 0{,}23$$

Cioè a meno di 25 centimetri sotto la superficie della diga la oscillazione diurna di temperatura non si fa più praticamente sentire!

È facile per mezzo della (18) calcolare i valori di $\frac{t}{T_e}$ per diversi valori del tempo e di λx. Il risultato è riassunto nella seguente tabella, per una metà del periodo, e per λx variabile da 0 a -3.

TABELLA XII.

$\frac{2\pi}{\Theta}\tau$	Valori di $\frac{t}{T_e}$ per:						
	$\lambda x = 0$	$\lambda x = -0,5$	$\lambda x = -1$	$\lambda x = -1,5$	$\lambda x = -2$	$\lambda x = -2,5$	$\lambda x = -3$
0	0	—0,291	—0,310	—2,223	—0,123	—0,049	—0,007
$^1/_8$	0,707	0,171	—0,078	—0,146	—0,127	—0,081	—0,040
$^2/_8$	1	0,532	0,199	0,016	—0,056	—0,066	—0,050
$^3/_8$	0,707	0,582	0,360	0,169	0,047	—0,012	—0,030
$T_x/T_e =$	1	0,606	0,368	0,223	0,135	0,082	0,050
x in m. periodo diurno	0	0,05	0,10	0,15	0,20	0,25	0,30
x in m. periodo annuo	0	1,00	2,00	3,00	4,00	5,00	6,00

Per l'altra metà del periodo i valori sono gli stessi, ordinatamente, ma cambiati di segno.

Nelle ultime righe sono dati i rapporti $\frac{T_x}{T_e}$, ed i valori di x per $\lambda = -1$ e $\lambda = -0,05$.

Con i valori della Tabella è stata disegnata la figura 13.

È facile prevedere che il caso più sfavorevole sia quello corrispondente a $\frac{2\pi}{\Theta}\tau = \frac{2}{8}$, poichè per esso si ha la massima disuniformità della distribuzione, mentre il valore della temperatura media t_0 rimane poco al disotto del valor massimo.

Alla curva può sostituirsi (fig. 14) il diagramma rettilineo FD, dove $-\lambda x = AD = 1,25$, ed $AF = T_e$.

Nel caso particolare della oscillazione diurna che ci occupa, essendo $\lambda = -1$, il punto D corrisponderebbe ad una profondità di appena 12,5 centimetri a partire dalla faccia a valle della diga.

Gli sforzi unitari prodotti da una distribuzione simile si possono calcolare facilmente, con l'aiuto della (16) e (16′), osservando che (fig. 14):

$$S = \frac{1}{2}\, 0,125 \cdot T_e$$

$$\zeta = \frac{1}{3} \cdot 0,125 - \frac{h}{2}$$

e quindi:

$$t_0 = 0{,}0625 \cdot \frac{T_e}{h}$$

$$\varepsilon = \frac{0{,}0417}{h} - \frac{1}{2}$$

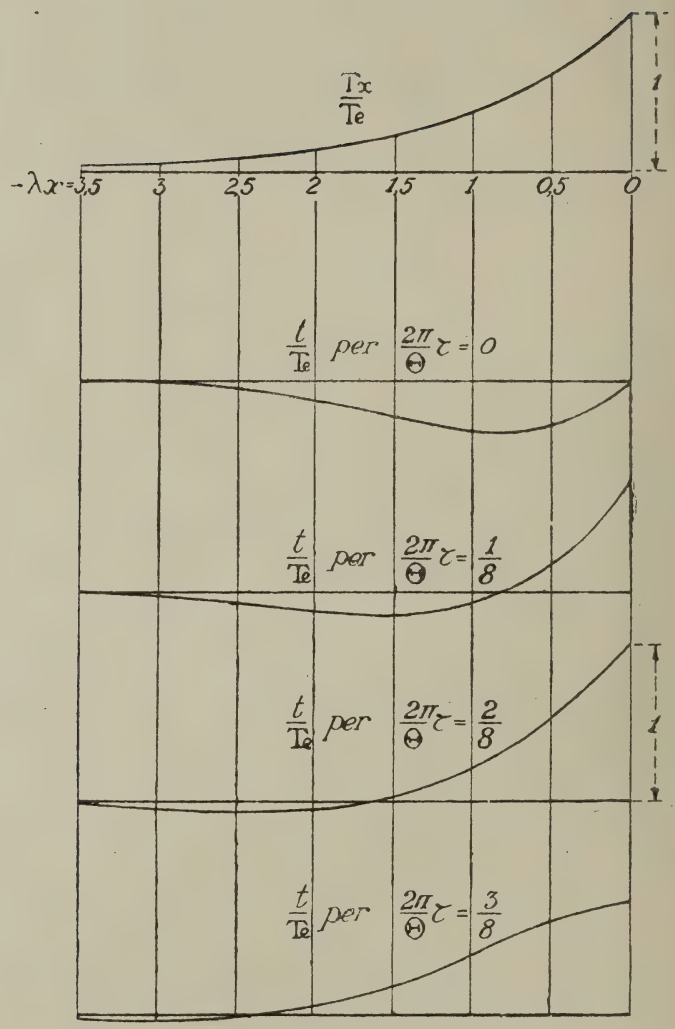


Fig. 13

Per esempio se $h = 1$ m., e $T_e = 10°$ si ha:

$$t_0 = 0{,}625$$
$$\varepsilon = -0{,}458$$

e posto che sia $\frac{h}{r} = \frac{1}{5}$, $2\varphi_0 = 140^\circ$, $E\alpha = 2{,}6$, (per metterci in un caso sfavorevole), si avrà il massimo sforzo per T_e negativo, e precisamente:

$$\varsigma_e' = 2{,}6 \cdot \times 0{,}625 \left(\frac{3{,}68}{5} + 0{,}458\right) = 1{,}94 \, {}^{kg}/_{cm^2}$$

Questo valore diminuisce rapidamente al crescere dello spessore, se rimane costante il rapporto $\frac{h}{r}$, e diminuisce pure col crescere dell'ampiezza e col diminuire del rapporto $\frac{h}{r}$.

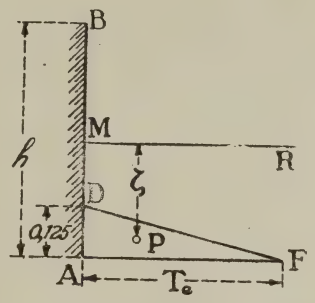


Fig. 14

Come si vede dunque, gli sforzi dovuti alle variazioni diurne di temperatura, nelle condizioni più eccezionali, non raggiungono i due Kg. a cm².

Si può quindi concludere che la oscillazione diurna di temperatura investe solamente uno strato superficialissimo della costruzione e pertanto può, nella maggior parte dei casi, completamente trascurarsi.

La oscillazione annua ha un effetto ben più importante. Infatti per essa si ha:

$$\lambda = -\sqrt{\frac{\pi}{365 \times 24} \cdot \frac{2{,}2 \times 0{,}21}{0{,}065}} = -0{,}05$$

e poi:

$$(21) \qquad \begin{cases} t = T_e \, e^{-0{,}05 . x} \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{365 \times 12} \tau - 0{,}05 \, x\right) \\ T_x = e^{-0{,}05 . x} \\ x = 20 \log . \frac{T_e}{T_x} \end{cases}$$

Qui, se si vuole che T_x si riduca ad un decimo di T_e, occorre spingersi ad una distanza venti volte maggiore, dalla

faccia a valle, che non nel caso della oscillazione diurna. Occorre quindi raggiungere lo spessore di almeno m. 4,60.

Se lo spessore della diga è molto minore, la oscillazione a monte non risulta più trascurabile.

Per es. se $x = \text{m. } 1 = \text{dcm. } 10$, sarà:

$$T_x \doteq e^{-0,5}\, T_e = 0,60\, T_e$$

E se $x = \text{m. } 2 = \text{dcm } 20$, sarà:

$$T_x = e^{-1}\, T_e = 0,37\, T_e$$

Avendo supposto che la temperatura dell'acqua a monte sia pressochè uniforme, l'adozione della (21) riesce sempre a favore della stabilità, perchè evidentemente le ampiezze T_x alle diverse distanze dalla faccia a valle, dovendo tendere a zero per $x = h$, decrescono più rapidamente che non con la legge (21).

La Tabella XII o il grafico (fig. 13) possono servire a tracciare i diagrammi della distribuzione delle temperature, e da essi, con operazioni grafiche semplicissime, si possono dedurre i valori di t_0 ed ε da introdurre nelle (16) e (16').

Se con maggior larghezza ancora, si volesse considerare al posto della distribuzione istantanea della temperatura, quella che si avrebbe se in ogni punto contemporaneamente si verificasse il valore massimo T_x, si scriverebbe:

$$t = e^{\lambda x} \cdot T_e$$

Con agevoli integrazioni si può allora calcolare:

$$S = \frac{T_e}{\lambda}\left(e^{\lambda h} - 1\right)$$

$$M_s = \frac{1}{2} \cdot \frac{T_e}{\lambda}\left[\left(e^{\lambda h} - 1\right)(h + 1) + 2h\right]$$

$$\zeta = \frac{h + 1}{2} + \frac{h}{e^{\lambda h} - 1}$$

E quindi si ottengono i valori di t_0 ed ε da introdurre nelle (16) e (16'):

$$\begin{cases} t_0 = \dfrac{e^{\lambda h} - 1}{\lambda h} \cdot T_e \\ \varepsilon = \dfrac{h+1}{2h} + \dfrac{1}{e^{\lambda h} - 1} \end{cases}$$

9. — Distribuzione delle temperature a serbatoio vuoto. — A serbatoio vuoto la distribuzione delle temperature dipende dalla legge di variazione sulle due facce. Il fenomeno può analizzarsi considerando che in ogni istante la temperatura è eguale sui due paramenti, e varia nel tempo con legge sinusoidale.

Prescindendo dalla perturbazione al contorno, si può studiare la propagazione del calore paragonandola a quella che si avrebbe in una lastra piana di spessore h, indefinitamente estesa in lunghezza e larghezza.

Le superficie isotermiche sono in ogni istante piani paralleli alle facce; il piano centrale della lastra è evidentemente piano di simmetria nel fenomeno, il quale è caratterizzato dalla distribuzione lungo una normale alle facce.

L'equazione differenziale è ancora:

$$\frac{\partial^2 t}{\partial x^2} = \frac{\rho c}{K} \frac{\partial t}{\partial \tau} \tag{8}$$

dove con x intenderemo la distanza di un piano isotermo dal piano mediano.

Le condizioni ai limiti sono:

$$t = T_e \operatorname{sen} \frac{2\pi}{\Theta} \tau \qquad \text{per } x = \pm \frac{h}{2} \tag{22}$$

Allo stato di regime si può ammettere che in un punto qualunque dell'interno della lastra la temperatura oscilli con legge sinusoidale di egual periodo che sulle facce, ma con ampiezza minore e ritardo di fase: ampiezza e fase che dipendono solo dalla posizione del punto e quindi della sua coordinata x.

Si dovrà quindi cercare di soddisfare alla (8) con una funzione della forma:

$$t = T_x \operatorname{sen}\left(\frac{2\pi}{\Theta}\tau + \varphi_x\right) \tag{23}$$

dove l'ampiezza T_x e la fase φ_x sono funzioni della sola x. È facile riconoscere che l'espressione:

$$t = T_e e^{\lambda\left(\frac{h}{2}-x\right)} \operatorname{sen}\left[\frac{2\pi}{\Theta}\tau + \lambda\left(\frac{h}{2}-x\right)\right] \tag{24}$$

soddisfa l'equazione differenziale (8), nonchè l'equazione ai limiti (22), per il solo caso però di $x = +\frac{h}{2}$.

Derivando infatti la (24) e sostituendo in (8), questa è verificata sempre che sia:

$$\lambda = \pm\sqrt{\frac{\pi}{\Theta}\,\frac{\rho c}{K}}$$

E poichè evidentemente le ampiezze delle oscillazioni decrescono col diminuire di x, occorre prendere λ negativo.

La (23) dunque è una funzione integrale, valida però solo per una metà della lastra. Per l'altra metà, a causa della simmetria, sarà valida la funzione:

$$t = T_e e^{\lambda\left(\frac{h}{2}+x\right)} \operatorname{sen}\left[\frac{2\pi}{\Theta}\tau + \lambda\left(\frac{h}{2}+x\right)\right]$$

che verifica la (8), nonchè la (22) per il solo caso $x = -\frac{h}{2}$.

Introducendo la funzione:

valore assoluto di $x = |x|$

si può scrivere, per tutto lo spessore della lastra:

$$t = T_e e^{-\sqrt{\frac{\pi}{\Theta}\frac{\rho c}{K}}\left(\frac{h}{2}-|x|\right)} \operatorname{sen}\left[\frac{2\pi}{\Theta}\tau - \sqrt{\frac{\pi}{\Theta}\,\frac{\rho c}{K}}\left(\frac{h}{2}-|x|\right)\right] \tag{25}$$

Ma la funzione $|x|$, generalmente continua, è discon-

tinua per $x = 0$, dove la derivata $\frac{d|x|}{dx}$ assume in destra ed in sinistra i due valori distinti $+1$ e -1.

Per tal motivo la (25), che è pure un integrale della (8) non soddisfa alla natura fisica del problema. Se infatti nel punto di mezzo, cioè per $x = 0$ non si ha anche $\frac{\partial t}{\partial x} = 0$, (come accade quando la funzione $t(x)$, simmetrica rispetto ad x è pure continua per $x = 0$), si dovrebbe avere accumulo o sottrazione di quantità finite di calore in uno strato infinitesimo intorno al punto $x = 0$. Ciò è assurdo, non potendosi supporre il calore specifico in tal punto infinitamente grande.

Dalla (25) si ricava la derivata $\frac{\partial t}{\partial x}$ per $x = 0$:

$$\left(\frac{\partial t}{\partial x}\right)_0 = \pm T_e \lambda e^{\frac{1}{2}\lambda h} \operatorname{sen}\left(\frac{2\pi}{\Theta}\tau + \frac{1}{2}\lambda h\right)$$

Questa derivata in valore assoluto decresce rapidamente al crescere di h, essendo λ una quantità essenzialmente negativa. Per spessori delle piastre molto grandi la derivata $\frac{\partial t}{\partial x}$ nel punto $x = 0$, diviene piccolissima; i due rami della curva si incontrano nella mezzeria in modo che le due tangenti sono ivi quasi per diritto.

Se ciò si verifica, si può, dato lo scopo dimostrativo della ricerca, ritenere la (25) come una soluzione approssimata del problema, anzi come una soluzione limite, tanto più esatta quanto maggiore è lo spessore della lastra. La effettiva legge di distribuzione delle temperature non può in realtà scostarsi molto dalla (25), specie in vicinanza delle facce, dove proprio la oscillazione termica è più sentita.

È notevole intanto come dall'adozione della (25), — essendo questa simile alla (18), — si deduca la conseguenza che in una diga di rilevante spessore la presenza o meno dell'acqua a monte non esercita sensibile influenza sulla distribuzione delle temperature nella metà a valle dello spessore della diga.

È possibile determinare lo spessore h minimo per cui si può applicare la (25), quando si sia fissato eguale ad $\frac{1}{n}$ il massimo valore di $\frac{\partial t}{\partial x}$ che si voglia trascurare.

Si avrà, in valore assoluto:

$$T_e \lambda e^{\frac{1}{2}\lambda h} = \frac{1}{n}$$

da cui:

$$h = -\frac{2}{\lambda} \log. n \lambda T_e$$

Assumendo come limite pratico $n = 50$, cioè $\frac{1}{n} = 2\,\%$, si ha:

a) per la oscillazione giornaliera, posto $T_e = 10^\circ$, (20° di oscillazione totale):

$$h = \text{m. } 1{,}24$$

b) per la oscillazione annua, posto $T_e = 20^\circ$, (40° di oscillazione totale):

$$h = \text{m. } 15{,}60$$

Per spessori minori di questi così calcolati, la (25) riesce di troppo grossolana approssimazione.

Riprendendo di nuovo la (23) dove, come si è detto, T_x e φ_x sono funzioni della sola x, e per di più simmetriche rispetto ad x, possiamo ricavare mediante derivazione i valori di $\frac{\partial^2 t}{\partial x^2}$ e $\frac{\partial t}{\partial \tau}$ e sostituirli nella equazione fondamentale (8).

Raggruppando i termini secondo le funzioni seno e coseno, si otterrà:

$$\left[\frac{d^2 T}{dx^2} - T\left(\frac{d\varphi}{dx}\right)^2\right] \operatorname{sen}\left(\frac{2\pi}{\Theta}\tau + \varphi\right) +$$
$$+ \left[2\frac{dT}{dx}\cdot\frac{d\varphi}{dx} + T\frac{d^2\varphi}{dx^2} - \frac{2\pi\rho c}{\Theta K} T\right] \cos\left(\frac{2\pi}{\Theta}\tau + \varphi\right) = 0$$

dove si è scritto, più semplicemente, T e φ al posto di T_x e φ_x.

Poichè questa eguaglianza deve essere verificata per qualsiasi valore di τ, dovrà aversi contemporaneamente:

$$(26)\qquad \begin{cases} \dfrac{d^2T}{dx^2} - T\left(\dfrac{d\varphi}{dx}\right)^2 = 0 \\ 2\,\dfrac{dT}{dx}\cdot\dfrac{d\varphi}{dx} + T\,\dfrac{d^2\varphi}{dx^2} - \dfrac{2\pi\rho c}{\Theta K}\,T = 0 \end{cases}$$

Sistema di equazioni differenziali simultanee nelle due funzioni T e φ, la cui integrazione fornirebbe le espressioni di tali funzioni, soddisfacenti alla equazione differenziale (8).

La soluzione del sistema (26) alle derivate totali non si presenta però più agevole di quella della equazione (8) alle derivate parziali.

Si puó tuttavia, analogamente a quanto ha fatto il Fourier per la (8), tentarne una integrazione per serie [1]).

---

[1]) È noto che l'integrale generale della (8) è stato posto dal Fourier sotto la forma:

$$t = \sum_{i=1}^{i=\infty} e^{-m_i^2 \frac{K}{\rho c}\tau} \cdot (A_i \operatorname{sen} m_i x + B_i \cos m_i x)$$

dove le infinite terne di coefficienti m_i, A_i, B_i, sono da determinarsi con le condizioni ai limiti.

Nel nostro caso, per la simmetria del fenomeno si avrebbe più semplicemente.

$$t = \sum_{i=1}^{i=\infty} B_i \cdot e^{-m_i^2 \frac{K}{\rho c}} \cdot \cos m_i x$$

e con le condizioni ai limiti, che sono:

$$t = T_e \operatorname{sen} \frac{2\pi}{\Theta}\tau \qquad \text{per } x = \pm\frac{h}{2} \qquad \text{e per ogni } \tau,$$

si possono ottenere, prendendo una volta i valori di τ, per cui è $t = 0$ $\left(\tau = 0, \frac{\Theta}{2}, \frac{2\Theta}{2}, \frac{3\Theta}{2} \ldots\right)$, ed una volta i valori di τ per cui è $t = T_e$, $\left(\tau = \frac{\Theta}{4}, \frac{3\Theta}{4} \ldots\right)$, quante si vogliano equazioni di condizioni.

Ma esse, in numero infinito, non sono praticamente risolvibili.

Dalle (26) è facile, mediante derivazione ed eliminazione, ricavare la equazione differenziale nella sola T:

$$[T\,T^{\mathrm{III}} + 3\,T^{\mathrm{I}}\,T^{\mathrm{II}}]^2 - 16\,\lambda^4\,T^3\,T^{\mathrm{II}} = 0 \tag{27}$$

in cui T^{I}, T^{II}, T^{III} sono le successive derivate di T rispetto ad x, e, come avanti, si è posto:

$$\lambda = -\sqrt{\frac{\pi}{\Theta} \cdot \frac{\rho c}{K}}$$

La (27) è di terzo ordine, e non può integrarsi in termini finiti. Sviluppando in serie la T:

$$T = T_0 + x\,T^{\mathrm{I}}_0 + \frac{x^2}{2!}\,T^{\mathrm{II}}_0 + \frac{x^3}{3!}\,T^{\mathrm{III}}_0 + \ldots$$

dove T_0, T^{I}_0 ecc. sono i valori di T e delle sue derivate per $x = 0$, si possono, con successive derivazioni della (27), esprimere tutte le derivate in funzione di T_0, T^{I}_0 e T^{II}_0. I valori di T_0, T^{I}_0 e T^{II}_0, da considerarsi come costanti di integrazione della (27), si determinano con le condizioni ai limiti.

Il calcolo è semplificato dal fatto che, per la simmetria della funzione T, debbono essere, per $x = 0$, nulle tutte le derivate di ordine dispari; tuttavia la ricerca del valore delle derivate successive di T, per mezzo della (27), risulta laboriosa.

Senza riportare qui il procedimento, che d'altronde non presenta difficoltà, darò i risultati da me calcolati fino alla sedicesima derivata:

$$T^{\mathrm{I}}_0 = T^{\mathrm{III}}_0 = T^{\mathrm{V}}_0 = T^{\mathrm{VII}}_0 = \ldots = 0$$
$$T^{\mathrm{II}}_0 = T^{\mathrm{VI}}_0 = T^{\mathrm{X}}_0 = T^{\mathrm{XIV}}_0 = 0$$

$$T_0^{\mathrm{IV}} = 8\,\lambda^4\,T_0 \quad ; \quad T_0^{\mathrm{VIII}} = -\,33 \cdot (8\lambda^4)^2 \cdot T_0$$
$$T_0^{\mathrm{XII}} = 16339 \cdot (8\,\lambda^4)^3 \cdot T_0 \quad ; \quad T_0^{\mathrm{XVI}} = -\,36\,744\,687 \cdot (8\,\lambda^4)^4\,T_0$$

Per cui la serie, nei suoi primi termini, diventa:

$$\frac{T}{T_0} = 1 + \frac{1}{4! \times 2}(2\,\lambda x)^4 - \frac{33}{8! \times 4}(2\,\lambda x) + \tag{28}$$
$$+ \frac{16339}{12! \times 8}(2\,\lambda x)^{12} - \frac{36\,744\,687}{16! \times 16}(2\,\lambda x)^{16} + \ldots$$

e può anche scriversi, sviluppando i calcoli numerici:

$$(28') \qquad \frac{T}{T_0} = 1 + 0{,}02083 \cdot (2\lambda x)^4 - 0{,}0002046 \cdot (2\lambda x)^8 +$$

$$+ 0{,}000004264 \cdot (2\lambda x)^{12} - 0{,}0000001173 \cdot (2\lambda x)^{16} + \ldots$$

ovvero:

$$(28'') \qquad \frac{T}{T_0} = 1 + \frac{1}{3} \cdot (\lambda x)^4 - 0{,}05238 \cdot (\lambda x)^8 +$$

$$+ 0{,}01747 \cdot (\lambda x)^{12} - 0{,}007686 \cdot (\lambda x)^{16} + \ldots$$

Il valore di T_0 si ottiene ponendo $T = T_e$ per $x = \pm \frac{h}{2}$

La serie (28) è rapidamente convergente per $\lambda x \lesssim \frac{1}{2}$ in valore assoluto, come si vede dalla (28'), e converge ancora abbastanza rapidamente per $\lambda x = 1$ in valore assoluto (28''). Dato il carattere approssimativo della ricerca, si può benissimo adottare la funzione:

$$(29) \qquad \frac{T}{T_0} = 1 + \frac{1}{3} (\lambda x)^4$$

in tutto l'intervallo per cui sia:

$$|\lambda x| \leq 1$$

perchè al massimo, per $\lambda x = -1$, la somma del terzo, quarto e quinto termine, che si trascurano, rappresenta appena il 3 % dei due termini che figurano nella (29), mentre d'altra parte il valore effettivo della serie è compreso fra quello della somma dei primi due termini, e quelli dei primi tre termini, a causa dell'alternanza dei segni.

Assumendo la (29) come epressione della funzione T, possiamo determinare la fase φ che vi corrisponde, integrando la prima delle equazioni (26).

Dalle (29) si cava:

$$\frac{d^2 T}{dx^2} = 4\, T_0\, \lambda^4 x^3$$

e quindi la prima delle (26) diventa:

$$4\,T_0\lambda^4 x^2 - T_0\left[1+\frac{1}{3}\,\lambda^4 x^4\right]\left(\frac{d\varphi}{dx}\right)^2 = 0$$

da cui:

$$\frac{d\varphi}{dx} = \pm\frac{2\,\lambda^2 x}{\sqrt{1+\frac{1}{3}\,\lambda^4 x^4}}$$

Una quadratura dà:

$$\varphi = \pm\sqrt{3}\cdot\log\left[\frac{(\lambda x)^2}{\sqrt{3}} + \sqrt{1+\frac{1}{3}(\lambda x)^4}\right] + C$$

Con le condizioni limiti $\left(\varphi_{\frac{h}{2}} = 0\right)$ si determina:

$$C = \mp\sqrt{3}\cdot\log\left\{\frac{\left(\lambda\frac{h}{2}\right)^2}{\sqrt{3}} + \sqrt{1+\frac{1}{3}\left(\lambda\frac{h}{2}\right)^4}\right\}$$

Tenendo conto che φ deve essere negativa, e che:

$$\frac{T_e}{T_0} = 1+\frac{1}{3}\left(\lambda\frac{h}{2}\right)^4$$

per cui:

$$T_0 = \frac{T_e}{1+\frac{1}{3}\left(\lambda\frac{h}{2}\right)^4}$$

la espressione approssimata della temperatura in un punto qualunque può scriversi:

$$(30)\quad t = T_e\cdot\frac{1+\frac{1}{3}(\lambda x)^4}{1+\frac{1}{3}\left(\lambda\frac{h}{2}\right)^4}\cdot\operatorname{sen}\left\{\frac{2\pi}{\Theta}\tau + \sqrt{3}\cdot\log\frac{(\lambda x)^2+\sqrt{3+(\lambda x)^4}}{\left(\lambda\frac{h}{2}\right)^2+\sqrt{3+\left(\lambda\frac{h}{2}\right)^4}}\right\}$$

Come si è fatto precedentemente per la espressione (25), si può fissare il massimo valore dello spessore al di sopra

del quale la legge (30) non sia applicabile, cioè il valore di h per cui sia $\lambda \frac{h}{2} = -1$.

Si ottiene così, tenendo presenti i valori di λ assunti innanzi:

a) per la oscillazione giornaliera:

$$h = m.\ 0{,}20$$

b) per la oscillazione annua

$$h = m.\ 4{,}00$$

Per spessori maggiori di questi così calcolati le (28) e (29) non si possono adoperare, perchè la serie diventa prima troppo lentamente convergente e poi indeterminata, ed il valore della somma dei primi n termini oscilla al crescere di n intorno ad un valore imprecisato, con scarti sempre maggiori.

C'è quindi un intervallo, compreso fra *m.* 0,20 e *m.* 1,24 per il periodo giornaliero, e fra *m.* 4 e *m.* 15,60 per il periodo annuo, nel quale non si può determinare la legge approssimativa di variazione.

Nell'ambito pratico delle costruzioni, perchè si possa istituire un calcolo attendibile degli sforzi termici è necessario che si tratti di opere di spessore non eccessivo: archi da ponti [1]), dighe ad arco, ecc.

Costruzioni molto spesse, come ad es. le dighe a gravità, non possono, allo stato attuale della quistione, assoggettarsi agevolmente al calcolo degli sforzi termici, e quindi è di minore interesse per tali opere la ricerca della distribuzione interna delle temperature.

Poichè ora gli archi da ponte o le dighe ad arco di qualche importanza difficilmente hanno spessori inferiori ad 1 *m.* o superiori a 4 *m.*, può per essi senz' altro assegnarsi la legge (25) per le oscillazioni termiche giornaliere, e la legge (30) per quelle annuali.

---

[1]) È superfluo avvertire che tutta la trattazione di questo paragrafo vale perfettamente anche per gli archi da ponte in cui sull' estradosso, anzichè riempimento di terra, vi siano archetti di alleggerimento, così che le due facce dell'arco siano entrambe a contatto dell' atmosfera.

Entrambe queste distribuzioni sono simmetriche rispetto alla mezzeria di ogni sezione trasversale, sicchè, per quanto si è detto al precedente paragrafo 6, esse equivalgono, agli effetti degli sforzi interni, ad una distribuzione uniforme con valore medio:

$$T_m = \frac{1}{h}\int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} t\,dx$$

Sostituendo alle t i valori massimi T, ciò che torna a vantaggio della stabilità, si avrà, per il caso della legge (30):

$$T = T_e \frac{1 + \frac{1}{3}(\lambda x)^4}{1 + \frac{1}{3}\left(\lambda \frac{h}{2}\right)^4}$$

e quindi, integrando:

$$T_m = T_e \frac{1 + \frac{1}{15}\cdot\left(\lambda \frac{h}{2}\right)^4}{1 + \frac{1}{3}\left(\lambda \frac{h}{2}\right)^4} = \alpha_1 T_e \tag{31}$$

avendo posto:

$$\alpha_1 = \frac{1 + \frac{1}{15}\left(\lambda \frac{h}{2}\right)^4}{1 + \frac{1}{3}\left(\lambda \frac{h}{2}\right)^4} \tag{31'}$$

Similmente per le legge (25), si ha:

$$T = T_e \cdot {}^{\lambda\left(\frac{h}{2} - |x|\right)}$$

ed integrando:

$$T_m = T_e \frac{e^{\lambda \frac{h}{2}} - 1}{\lambda \frac{h}{2}} = \alpha_2 T_e \tag{32}$$

avendo posto:

$$\alpha_2 = \frac{e^{\lambda \frac{h}{2}} - 1}{\lambda \frac{h}{2}} \tag{32'}$$

L'effetto termico si può dunque valutare, riducendo mediante un coefficiente α_1 o α_2 gli sforzi che si avrebbero se la temperatura in ogni punto fosse eguale alla temperatura media esterna.

Nella figura 15 sono tracciate le curve di α_1 ed α_2 per valori di $\lambda \frac{h}{2}$ da 0 a - 10. Esse sono disegnate con linea piena

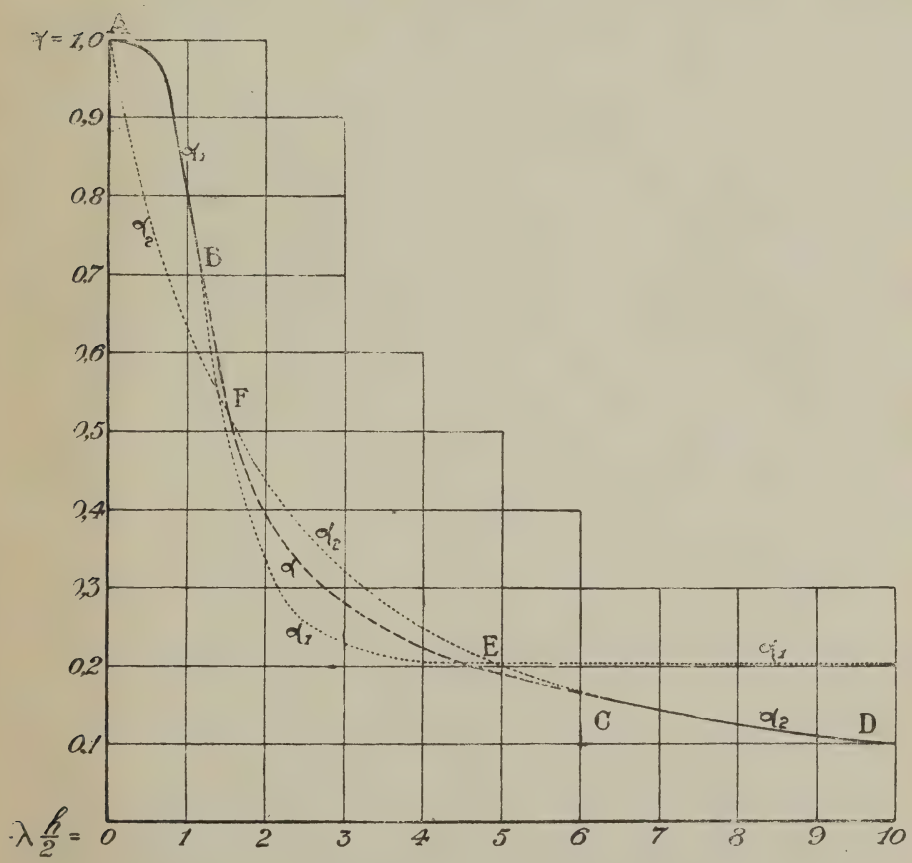


Fig. 15

per il solo tratto nel quale sono applicabili, mentre per il rimanente sono tracciate a puntini.

La curva α_1 tende asintoticamente al valore 0,2, mentre la curva α_2 tende invece asintoticamente al valore zero, al crescere oltre ogni limite del valore assoluto di $\lambda \frac{h}{2}$.

Posto:

$$T_m = \alpha\, T_e \tag{33}$$

dove $\alpha = f\left(\lambda, \frac{h}{2}\right)$ rappresenti il valore del coefficiente di riduzione corrispondente alla effettiva distribuzione delle temperature e non alle sue espressioni approssimate, si può ricavare da quanto precede che la curva α si confonde con la curva α_1 nel tratto *AB*, e con la α_2 nel tratto *CD* ed oltre *D* fino a $-\infty$.

Nel tratto intermedio *BC* non se ne conosce il tracciato; tuttavia per la continuità della legge, dovendosi la curva α raccordare in *B* e *C* alle α_1 ed α_2, si può presumere che il suo andamento debba essere approssimativamente quello disegnato con linea a tratti nella Fig. 15.

Il diagramma totale di α è dato dalle due linee curve a tratto pieno, raccordati dalla linea a trattini.

Dalla figura si vede che se si adottasse la α_1 per ogni $\lambda \frac{h}{2}$ si avrebbero risultati alquanto scarsi nel tratto *BE*, mentre nel tratto a destra di *E* si avrebbero risultati eccessivi.

Viceversa adottando la α_2 si avrebbero risultati scarsi nel tratto *AF* ed eccessivi nel tratto *FE*.

Abbastanza legittimo sembra l'adozione della legge α_1 per $\lambda \frac{h}{2} < 1{,}5$ in valore assoluto, e di α_2 per $\lambda \frac{h}{2} > 5$ in valore assoluto, adoperando nel tratto intermedio un coefficiente.

$$\alpha = \frac{\alpha_1 + \alpha_2}{2}$$

Con questo criterio è calcolata la Tabella XIII che segue, nella quale sono riportati i corrispondenti spessori *h* in metri, nella ipotesi di oscillazione diurna ed annua, desunti per valori di λ rispettivamente di -1 e $-0{,}05$.

TABELLA XIII

$-\lambda \frac{h}{2}$		0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0	1,5	2	2,5
h in m.	periodo diurno	0,02	0,04	0,06	0,08	0,10	0,12	0,14	0,16	0,18	0,20	0,30	0,40	0,50
	periodo annuo	0,40	0,80	1,20	1,60	2,00	2,40	2,80	3,20	3,60	4,00	6,00	8,00	10,00
$\alpha = \frac{T_m}{T_e}$		1,000	0,999	0,998	0,993	0,984	0,967	0,941	0,904	0,856	0,800	0,515	0,379	0,313

$-\lambda \frac{h}{2}$		3	3,5	4	5	6	8	10	12	14	16	18	20	40
h in m.	periodo diurno	0,60	0,70	0,80	1,00	1,20	1,60	2,00	2,40	2,80	3,20	3,60	4,00	8,00
	periodo annuo	12,00	14,00	16,00	20,00	24,00	32,00	40,00	48,00	56,00	64,00	72,00	80,00	160,00
$\alpha = \frac{T_m}{T_e}$		0,273	0,245	0,227	0,199	0,166	0,125	0,100	0,083	0,071	0,062	0,055	0,050	0,025

Così per esempio per una diga di m. 2,00 di spessore, si ha $\alpha = 0{,}100$ per l'oscillazione diurna ed $\alpha = 0{,}984$ per quella annua; sicchè se la prima è di 20° al massimo, e la seconda di 40°, (valori in genere eccessivi, perchè corrisponderebbero ad una differenza totale di 60° fra il massimo ed il minimo assoluto), si ha nel periodo diurno:

$$T_m = 0{,}1 \times 10 = 1^0$$

ed in quello annuo:

$$T_m = 0{,}984 \times 20 = 19^0{,}6$$

In totale occorrerà tener conto di una oscillazione di 20°,6 in più o in meno, corrispondente ad uno scarto totale di 41°,2, invece che di 60° come si farebbe se non si tenesse conto della distribuzione effettiva delle temperature.

Gli sforzi risulteranno ridotti nella stessa proporzione, cioè circa ai due terzi.

Se la diga avesse invece uno spessore di m. 8, si avrebbe:

$$T_m = 0{,}025 \times 10 = 0^0{,}2$$
$$T_m = 0{,}379 \times 20 = 7^0{,}6$$

per i due periodi, con una oscillazione di 7°,8 in più o in meno, e gli sforzi risulterebbero diminuiti nel rapporto $\frac{7{,}8}{30}$, cioè a circa un quarto.

10. — Fenomeni termici che accompagnano la presa del cemento. — Un altro fenomeno termico che assume grande importanza, e tanto maggiore quanto più grande è lo spessore della costruzione, è quello dovuto allo sviluppo di calore durante la presa del cemento.

Non sono mancate in proposito delle esperienze. Il Comandante Rébaucourt fin dal 1895 [1]), prese in esame il fenomeno determinando che l'aumento di temperatura si inizia appena comincia la presa, ed è tanto minore quanto più la presa è lenta.

---

[1]) Com. des Méth. d'Essai des Matériaux de Constr. 1895.

Nel laboratorio della Università di Lehigh (Jowa) fu misurata la temperatura al centro di un cubo di m. 0,20 di lato formato con malta di cemento 1:3. Dopo 18 ore essa raggiunse un massimo di 71°, mentre la temperatura dell'ambiente era di 21°.

J. E. Howard [1]) notò che l'aumento di temperatura è tanto maggiore quanto più grande è il blocco che si considera. Sperimentando su impasti di puro cemento riuscì ad ottenere aumenti di temperatura fino a 100°.

In grandi masse di calcestruzzo di cemento sono state eseguite, pure in America, numerose esperienze con rilievi diretti delle temperature.

Così nella diga Boonton ed in quella di Arrow-Rock, delle quali parlerò più oltre, furono constatati aumenti di temperatura fino a 40° nella prima, e non oltre i 20° nella seconda. In questa però il tenore di cemento è molto scarso $\left(\frac{1}{13}\right.$ circa della massa totale$\left.\right)$, e le misure non furono eseguite subito dopo il getto.

Nella diga Kensico [2]), l'Ing. G. T. Seabury ha misurato aumenti di temperatura fino a 46° centigradi, con un calcestruzzo in cui il cemento rappresenta circa $\frac{1}{9}$ della massa totale. Il massimo di temperatura si ebbe, nei diversi punti, da 7 a 28 giorni dopo la gettata.

Nella diga Spaulding [3]) furono messe due coppie termoelettriche, una prossima alla faccia ed una nel centro della diga. Dopo 11 giorni dalla gettata l'aumento di temperatura era di 12° presso le facce e di 24° nel centro; dopo due mesi era quasi del tutto scomparso l'aumento di temperatura presso le facce, mentre al centro era ancora di 10° e decresceva in ragione di circa un grado e mezzo per settimana.

Nella diga Rock Creek, che per essere ad archi multipli è di piccolo spessore, l'aumento di temperatura raggiunse

---

[1]) Taylor e Thompson. Treatise on concrete, plain and reinforced. 1908.

[2]) V. Papers Am. Soc. Civ. Eng. 1917 pag. 1593.

[3]) V. Engineering News Record 1917 pag. 253.

al centro il massimo di 10° dopo 18 ore e poi rapidamente decrebbe.

La incertezza che permane però in tutte queste ricerche, deriva, a mio vedere, dall' errore fondamentale di tutti gli sperimentatori a voler considerare il fattore temperatura, mentre più razionalmente dovrebbesi prendere in esame il fattore quantità di calore. Trattandosi infatti di un fenomeno chimico esotermico, si può ritenere costante la quantità di calore sviluppata per unità di volume, mentre la distribuzione delle temperature dipende dalla durata del fenomeno e dalla maggiore o minore facilità che ha il calore sviluppato di disperdersi nell'ambiente, dipendentemente dalle dimensioni del corpo.

Le esperienze menzionate mostrano infatti, come è logico, che per blocchi di maggiore grossezza la temperatura si palesa più alta, perchè il calore, a causa della scarsa trasmissibilità interna del calcestrnzzo, solo lentamente può disperdersi all'esterno ed accumulandosi nella massa ne rialza la temperatura.

Il fenomeno dovrebbe quindi essere ulteriormente analizzato allo scopo di conoscere:

a) la quantità totale di calore che per ogni unità di volume si sviluppa durante tutta la presa,

b) la legge di distribuzione, nel tempo di durata della presa, di questa emissione di calore.

In tal senso ho iniziato delle ricerche sperimentali, ma la ristrettezza del tempo e la delicatezza delle osservazioni mi hanno impedito di portarle a termine in modo da poterne dare notizia qui: ne farò oggetto perciò di una pubblicazione successiva.

È interessante però vedere l'impostazione analitica del problema in qualche caso semplice.

Se si suppone che la gettata di un arco, di una volta, o di un muro sia fatta tutta contemporaneamente in un tempo brevissimo, sì che la presa abbia inizio solo dopo che la gettata sia terminata, il fenomeno della trasmissione

di calore sarà caratterizzato, (come nei casi studiati innanzi, e trascurando sempre le perturbazioni al contorno), dal fatto che le isotermiche sono superficie parallele ai paramenti.

L'equazione differenziale della trasmissione si ottiene osservando che attraverso l'unità di superficie di una isotermica passa nell'unità di tempo la quantità di calore:

$$-K\frac{\partial t}{\partial x}$$

ed attraverso l'unità di superficie isotermica distante dx dalla prima:

$$K\frac{\partial}{\partial x}\left(t+\frac{\partial t}{\partial x}dx\right)$$

La differenza $K\frac{\partial^2 t}{\partial x^2}dx$ resta immagazzinata nell'elemento di volume dx.

Ma se è q la quantità di calore che nell'unità di tempo si sviluppa per ogni unità di volume, per effetto del fenomeno chimico della presa, si sarà immagazzinata nell'elemento la quantità totale di calore:

$$\left(q+K\frac{\partial^2 t}{\partial x^2}\right)dx$$

che ne farà variare la temperatura di $\frac{\partial t}{\partial \tau}$. Si avrà quindi:

$$\left(q+K\frac{\partial^2 t}{\partial x^2}\right)dx=\rho c\frac{\partial t}{\partial \tau}dx$$

L'equazione differenziale fondamentale del problema è perciò:

$$q+K\frac{\partial^2 t}{\partial x^2}-\rho c\frac{\partial t}{\partial \tau}=0 \tag{34}$$

Il termine q è funzione di τ e di t, perchè lo sviluppo di calore varia durante la presa, e varia anche con la temperatura.

Una idea dell'andamento del fenomeno può aversi esaminando qualche caso limite semplicissimo.

Se lo sviluppo di calore avvenisse tutto in un tempo brevissimo, tanto da poter considerare che la temperatura si elevi uniformemente in tutti i punti prima che si inizi la fase di trasmissione, e si potesse ritenere la temperatura esterna costante durante tutta la fase variabile delle temperature, si ricadrebbe nel caso del corpo uniformemente caldo posto in un ambiente esterno più freddo.

La fase di raffreddamento sarebbe caratterizzata dalla nota legge, data dal Fourier:

$$t = \sum_{i=1}^{i=\infty} A_i \cdot \operatorname{sen} 2 i \pi \frac{x}{h} \cdot e^{-\left(\frac{2i\pi}{h}\right)^2 \cdot \frac{K}{\rho c} \cdot \tau}$$

dove le costanti A soddisfano la equazione:

$$T_0 = A_1 \operatorname{sen} 2\pi \frac{x}{h} + A_2 \operatorname{sen} 4\pi \frac{x}{h} + \ldots$$

per qualunque valore di x.

In particolare, dopo i primi istanti del fenomeno, basterebbero pochi termini a caratterizzarlo.

Il caso limite opposto è dato dalla ipotesi che lo sviluppo di calore avvenga in un tempo lunghissimo e con legge costante, in modo che si possa ritenere raggiunto, dopo un periodo iniziale, uno stato di regime, per cui:

$$\frac{\partial t}{\partial \tau} = 0$$

Si avrebbe cioè:

$$\frac{\partial^2 t}{\partial x^2} = -\frac{q}{K}$$

da cui, integrando due volte:

$$t = -\frac{1}{2}\frac{q}{K} x^2 + c_1 x + c_2$$

Con le condizioni limiti, supposta la temperatura esterna costantemente eguale a zero, ciò che non lede la generalità del problema, si avrà:

$$t = \frac{1}{2}\frac{q}{K}\left(\frac{h^2}{4} - x^2\right) \tag{35}$$

Nel primo dei due casi considerati la temperatura massima si ha nello stato iniziale e vale

$$t = \frac{Q}{\rho c} \tag{36}$$

essendo Q il calore totale svolto durante la presa, per unità di volume; nel secondo caso la temperatura massima si raggiunge nello stato di regime espresso dalla legge parabolica (35) e vale:

$$t = \frac{1}{8} \frac{q}{K} h^2 \tag{36'}$$

In una costruzione di grande mole, con spessori rilevanti, la temperatura al centro tende ad avvicinarsi al valore (36); in costruzioni di piccolo spessore la distribuzione delle temperature tende invece alla forma (36'), e tanto più, quanto più sottile è lo spessore e più lenta la presa.

11. — Contrazione della malta di cemento durante la presa. — Un effetto paragonabile alle variazioni di temperatura è quello prodotto dalla contrazione della malta di cemento al momento della presa.

Dalle esperienze eseguite in proposito in Germania [1]), sembra si possa stabilire che la contrazione di volume cresce col tenore di cemento, e diminuisce con la maggiore stagionatura e la più alta cottura di esso. Un impasto fatto con poca acqua e mantenuto poi a lungo umido, riduce lo effetto della contrazione [2]). Le contrazioni misurate oscillano fra 0,0003 e 0,0005, per unità di lunghezza.

Esperienze eseguite in America da A. T. Goldbeck [3]) danno abbastanza concordemente un valore di 0,0005, pari al più alto dei valori precedenti; ed un valore di 0,0004 hanno dato delle misure [4]) fatte su un blocco di calcestruzzo, (una parte di cemento per due di sabbia e 4 di ghiaia), tenuto per 100 giorni alla temperatura costante di 22°.

---

[1]) Vedi Mitteilungen 1915 e 1918, e Armierte Béton 1915.

[2]) V. Rendiconti del laboratorio di Gross-Lichterfelde 1916.

[3]) Concrete Age, Agosto 1911.

[4]) Bulletin of Jowa Eng. Exper. Station. N. 30.

Se il calcestruzzo fa presa in acqua, invece di una contrazione si ha un rigonfiamento che ha valore presso poco a eguale alla metà della contrazione che si verifica nella presa all' aria.

L' importanza del fenomeno della contrazione è stata messa in evidenza in vari casi di fenditure in ponti di cemento armato [1]), ed i più recenti regolamenti impongono di tenerne conto, tanto per gli sforzi che si producono nel calcestruzzo quanto per quelli che ne derivano nelle armature metalliche.

Nel Regolamento Prussiano si richiede di eguagliare l'effetto della contrazione ad un abbassamento di temperatura di 15°, (corrispondente ad un coefficiente di contrazione di 0,0002), ammettendo però che il coefficiente di sicurezza del calcestruzzo possa portarsi a 60 Kg/cmq., e quello del ferro a 1200 Kg/cmq. Similmente nel Regolamento del Württemberg si richiede di aumentare di $\frac{1}{3}$ i carichi di sicurezza quando si tiene conto degli effetti termici e di $\frac{1}{2}$ quando si tiene conto anche della contrazione. Il Regolamento Svizzero eguaglia la contrazione ad un abbassamento di temperatura di 20°, corrispondente ad una contrazione di circa 0,00025 per metro.

L'effetto della contrazione è favorevole in un primo periodo perchè bilancia in parte la dilatazione dovuta al calore sviluppatosi durante la presa, ma diventa dannoso quando è cessato l'effetto di questo calore.

Si possono diminuire gli sforzi dovuti alla contrazione, eseguendo il getto in condizioni di temperatura minori della media, cioe nei mesi freddi, purchè però la temperatura non sia tanto bassa da impedire il regolare indurimento del getto.

In tal modo si riduce non solo l' effetto delle manifestazioni termiche della presa, la quale a basse temperature

---

[1]) V. Zeitschrift für Bauwesen, 1915, e Zentralblatt der Bauwesen, 1916.

diventa più lenta, ma anche quello della contrazione, perchè nei massimi rigori invernali la contrazione termica, che si somma con quella dovuta alla presa, deriva da una piccola differenza di temperatura.

12. — Risultati di recenti misure dirette delle temperature. — Parallelamente alle ricerche di laboratorio, possono essere di grande interesse e di grande aiuto, nello studio degli sforzi termici, esperimenti direttamente eseguiti su costruzioni esistenti.

Solo negli ultimi anni questa via pare decisamente battuta, e se risultati più conclusivi non ancora si sono ottenuti, mi pare si possa attribuire al fatto che la indagine sperimentale non sia stata sufficientemente appoggiata e guidata dalla ricerca analitica, della quale ho fatto un tentativo nei paragrafi precedenti.

Sono note le osservazioni di temperatura fatte nel 1904 e 1905 sul ponte di Morbegno, le quali assodarono che la temperatura media giornaliera penetra nella massa della volta [1]), ciò che è conforme ai risultati dell'analisi teorica precedente [2]). Se le osservazioni fossero state fatte non ogni giorno ma ogni ora, si sarebbe potuto determinare il modo come la oscillazione giornaliera penetra nell'interno.

---

[1]) Vedi Guidi: Influenza della temperatura sulle costruzioni murarie (Atti R. Accad. delle Scienze di Torino, 1906), ed anche Scienza delle Costruzioni, Parte IV.

[2]) L'arco ha spessore di m. 1,50, e se lo consideriamo a contatto con l'aria anche nell'estradosso, ciò che avviene solo in parte, avremo dalla Tab. XIII:

$$T_m = 0{,}99 \cdot T_e$$

per l'oscillazione annua, e:

$$T_m = 0{,}13 \cdot T_e$$

per la oscillazione giornaliera.

Il forte valore del primo coefficiente mostra appunto che la media giornaliera penetra nella massa.

Si consideri inoltre che il ponte è di granito e che quindi il valore di λ è anche minore che non per il calcestruzzo di cemento, per cui il coefficiente di T_e risulta maggiore.

Qualche anno più tardi l'Ing. F. von Emperger [1]), in uno studio sugli effetti della dilatazione negli archi incastrati, esprime il parere che nei calcoli debba considerarsi una oscillazione termica tanto minore quanto maggiore è lo spessore del getto.

Egli propone:

per *m* 0,20 di spessore una oscillazione di 40°, da +25° a — 15°
per *m* 0,50 » » 34°, da +22° a —12°
per *m* 1,00 » » 24°, da +17° a — 7°

Ciò è in pieno accordo con l'andamento reale del fenomeno, tuttavia con la scorta del procedimento analitico ed in determinate condizioni climatiche le ipotesi da considerare possono più razionalmente stabilirsi caso per caso.

Numerose sono anche le osservazioni sperimentali che riguardano i rapporti fra deformazioni in punti determinati (rialzamenti o abbassamenti della chiave nei ponti, maggiore o minore ampiezza di lesioni nelle dighe, ecc.) e le variazioni atmosferiche di temperatura, che in tempi più recenti sono state istituite; ma di gran lunga più importanti sono le misure termometriche eseguite dall'Ing. T. Merriman nella diga Boonton, sul fiume Rockaway, nello stato di New-York [2]), e dagli Ingegneri C. H. Paul e A. B. Mayhew nella famosa diga di Arrow-Rock, una delle più alte dighe a gravità esistenti [3]).

La diga Boonton, pure di profilo a gravità, fu costruita dal 1902 al 1904 con muratura « *ciclopica* », costituita da blocchi di gneiss annegati in calcestruzzo di cemento, di proporzione 1:3:6. Il rapporto dei blocchi e del calcestruzzo è, in volume, di 1:1.

Oltre le osservazioni relative alle lesioni formatesi con le basse temperature, e che non sono diverse da altre osservazioni simili, le misure veramente interessanti sono co-

---

[1]) Béton und Eisen, 1909.

[2]) V. Papers Am. Soc. Civ. Eng. Agosto 1908.

[3]) V. Papers Am. Soc. Civ. Eng. 1915 p. 789 e 2009.

stituite da rilievi di temperature eseguiti nell'interno della diga, a mezzo di apposite pinze termo-elettriche, messe in opera man mano che procedeva la gettata, a diverse profondità nell'interno della massa.

Le misure di alcune coppie termoelettriche non sono attendibili, perchè furono disturbate, pare, da azioni chimiche che la vulcanite, costituente l'involucro isolante dei fili, aveva sul metallo [1]).

Tuttavia i risultati accettabili, sebbene scarsi di numero, sono sempre del massimo interesse. Essi si prolungano dal giugno 1903 fino al maggio 1906, (per alcune pinze il periodo è minore), con una osservazione giornaliera per ogni punto. Il Merriman riunisce in un grafico il risultato delle misure eseguite, ma da esso l'andamento del fenomeno non si deduce con chiarezza, perchè le linee risultano (specie per la temperatura esterna) troppo movimentate a causa delle oscillazioni perturbatrici della temperatura, costituenti irregolarità della durata di $5 \div 10$ giorni ciascuna.

È notevole però che conformemente a quanto ho detto nei paragrafi precedenti, le oscillazioni perturbatrici sono pochissimo risentite nell'interno della diga. I diagrammi infatti delle temperature interne hanno un andamento notevolmente meno accidentato del diagramma della temperatura esterna.

Allo scopo di meglio mettere in evidenza gli effetti della oscillazione annua di temperatura, che è quello che più importa, ho disegnata la Tav. *B* annessa, nella quale è riportata la sezione della diga, con la indicazione delle epoche delle successive gettate e della posizione delle pinze termoelettriche, distinte con numeri d'ordine. Sono poi tracciate le curve delle temperature esterne e delle temperature interne in corrispondenza delle pinze stesse, assumendo, anzichè i valori giornalieri, quelli medî mensili.

Si regolarizza così il fenomeno, sfrondandolo delle per-

---

[1]) Il Merriman, a seguito di ciò, suggerisce, in eventuali installazioni del genere, di isolare i fili con un triplice strato di seta, ricoprendo ogni strato con della paraffina.

turbazioni (lievi del resto, come si è detto, per i punti interni) e lo si rende più evidente nel suo andamento annuo.

Manca, ed è doloroso, il diagramma del livello d'acqua a monte, che darebbe la spiegazione di parecchie irregolarità.

Già il Merriman aveva notato il fenomeno del decrescere dell'ampiezza, col crescere della distanza dal paramento, e del ritardo della fase.

Per quest'ultima riconosce anzi la legge di proporzionalità con la distanza dalla faccia, ciò che conferma quanto si è analiticamente determinato, tanto a serbatoio vuoto che pieno, per dighe di grande spessore.

Per le ampiezze il Merriman dà una formula, che nelle notazioni da me adottate si può scrivere:

$$T_x = \frac{T_e}{2{,}07 \sqrt[3]{\frac{h}{2} - x}}$$

essendo le lunghezze espresse in dcm. Per T_e egli assume una semiampiezza di 37°,5, computando una oscillazione totale annua di 75°.

Questa legge però non è attendibile perchè, mentre i massimi e minimi di temperatura interna non risentono le oscillazioni giornaliere, la oscillazione esterna è tenuta dall'autore pari a 75°, valutando cioè la differenza fra la più bassa temperatura istantanea invernale e la più alta estiva (— 28° e + 47°). Se si fossero presi a base la massima e minima temperatura media giornaliera, il risultato sarebbe stato più conforme a quello dato dall'analisi.

Inoltre i valori assunti per le temperature interne risentono ancora troppo l'influsso del fenomeno termico della presa. Quest'ultimo si mostra nei diagrammi della Tav. B in tutta la sua importanza, producendo una elevazione termica che influenza la distribuzione delle temperature durante un periodo di alcuni anni. Con misure fatte ora per ora, subito dopo il getto, per la pinza N. 11, il Merriman stabilì che la temperatura dovuta alla presa raggiunse dopo circa 16 ore un massimo di 38°, essendo di 20° la temperatura media atmosferica. Tuttavia questo massimo dura pochissimo tempo, poichè la temperatura ridiscende abbastanza rapidamente.

Dall'esame della Tav. B, si può desumere che, nei primi anni dalla costruzione, la oscillazione termica in un punto interno ha un valore medio di 6 ÷ 8 gradi più alto della media atmosferica.

Con la guida delle considerazioni teoriche fatte innanzi, l'esame della Tav. B presenta un interesse senza pari, e davvero è doloroso che non si abbiano le misure per un periodo più lungo.

Anzitutto, sfrondata delle perturbazioni, la oscillazione annua appare con molta approssimazione rappresentabile con una curva sinusoidale. Per meglio mostrare tale fatto è stato tracciata a puntini la sinusoide relativa.

Il carattere sinusoidale delle oscillazioni nei punti interni è caratteristicamente verificato per i punti lontani dal paramento a monte, (pinze 9 e 10). Per i punti vicini a questo paramento, (pinze 5 e 6), si notano le brusche variazioni dovute al riempimento del lago.

Il valor medio di ogni oscillazione si va abbassando a misura che si disperde il calore prodotto nella presa, ma l'effetto si protrae alcuni anni.

Esso è più duraturo nei punti più interni (pinze 10 e 6) che non in quelli più esterni (pinze 5 e 9).

Infine, è evidente il fenomeno del ritardo di fase, tanto maggiore quanto più il punto è interno.

La mancanza del diagramma delle altezze d'acqua e della fase di regime del fenomeno, (anni successivi al 1906), non permette confronti più precisi con i risultati teorici, tuttavia quelli approssimativi che possono farsi sono ancora abbastanza suggestivi.

Ad esempio, nel punto 9 la oscillazione ha già assunto fin dal primo anno una ampiezza pari a $^7/_{10}$ di quella esterna, come compete ad un punto situato a m. 0,74 di profondità, (giusta la Tab. XII a suo tempo calcolato), mentre l'ampiezza nel punto 10 va diminuendo rapidamente anno per anno, col disperdersi del calore della presa, e non è possibile verificare se raggiunge il valore 0,09 T_e come dovrebbe essere per la Tab. XII.

Analoghe alle misure precedenti sono quelle eseguite sulla diga Arrow-Rock, con apparecchi termoelettrici più precisi, e rilevando le temperature esterne non solo della atmosfera, ma anche delle pareti della diga mediante appositi termometri a mercurio.

Da questi rilievi termometrici si potrebbe dedurre una conferma più esauriente della teoria, se essi fossero stati continuati per molti anni. Purtroppo però i dati si riferiscono ad un periodo biennale, cioè anche minore che per la diga Boonton, nè si ritrovano tracce, negli atti dell'Associazione degli Ingegneri Civili Americani comparsi fin oggi, di ulteriori risultati di misure.

Quello che caratterizza però i rilievi in parola è lo studio, — seguito per un periodo di 48 ore, con osservazioni fatte ogni due ore —, dell'influenza delle variazioni diurne di temperatura, sui punti interni della diga, nello stato di regime.

Per tre pinze termoelettriche, distanti m. 0,30, m. 0,60 e m. 1,00 circa dalla faccia più prossima, fu trovato un rapporto fra l'ampiezza di oscillazione termica nel punto considerato e quella esterna, misurata sulla faccia, eguale rispettivamente a 0,043; 0,017; 0,00.

Con la legge (18), per un valore di $\lambda = -1{,}05$, cioè molto prossimo a quello di $\lambda = -1$, adottato come media, si avrebbero, per il suddetto rapporto, i valori 0,043; 0,0018; 0,00. La sconcordanza nel secondo valore può risiedere nella difficoltà di apprezzare esattamente, con pile termoelettriche, variazioni termometriche inferiori a mezzo grado centigrado. Una grande concordanza si nota invece per il punto situato a m. 0,30 di profondità anche per quanto riguarda il ritardo di fase, che fu rilevato di 12 ore, mentre che per la (18) risulta appunto, misurato in ore, ed esprimendo le distanze in decimetri:

$$\frac{\Theta}{2\pi}\lambda x = \frac{24}{2\pi} \times 1{,}05 \times 3 = 12^h{,}05$$

Per quanto riguarda le oscillazioni annue, dal periodo biennale preso in esame, gli sperimentatori, riferendosi alle

temperature medie giornaliere, hanno dedotto che, per tre punti situati a m. 0,60, m. 3,00 e m. 18,00 circa dalla faccia più prossima, il rapporto $\frac{T_x}{T_e}$ risulta rispettivamente di 0,675; 0,164; 0,000. Calcolandolo con la formula (18), per $\lambda = -0{,}0555$, poco diverso dal valor medio di $-0{,}05$ assunto a suo tempo, si ha rispettivamente 0,690; 0,156; 0,000, con concordanza molto notevole.

Altre misure termometriche, pure di molto interesse, furono eseguite nel 1909-1912 dagli Ingg. C. S. Nichols e C. B. Mc Cullough [1]), sopra archi con timpani riempiti di terra, e precisamente su quelli dei ponti Squaw Creek, presso Ames (Jowa), e Walnut Street, presso Des Moines (Jowa), entrambi di cemento armato. Le corde degli archi presi in esame sono di m. 14 e di m. 21, le frecce entrambe di m. 3,45 circa.

Dai risultati sperimentali fu possibile dedurre:

a) che la oscillazione nell' interno della massa, per archi aventi uno spessore di m. $1{,}50 \div 1{,}80$, è circa il 75 % della oscillazione delle medie temperatura diurne ell'esterno.

b) che la massima temperatura dovuta alla presa varia da 34° a 54° e si raggiunge in un tempo variabile da 18 ore a 8 giorni dopo la gettata.

c) che la ampiezza di oscillazione interna di temperatura, nel primo anno, include l'effetto della presa e supera di circa il 10 % le ampiezze degli anni successivi.

d) che il ritardo di fase nei punti più lontani dall'intradosso è circa di 4 giorni, ed è negli altri punti proporzionale alla loro distanza dalla faccia esposta all' aria.

I risultati *a)* e *d)* sono molto d'accordo con quelli analitici desunti per il caso di un arco che abbia una faccia

---

[1]) Bulletin of the Jowa State College of Agriculture and Mechanic, N. 30.

esposta alle oscillazioni atmosferiche, ed un'altra a temperatura costante, (estradosso ricoperto di terra).

Tutte le ricerche sperimentali a cui abbiamo accennato sono però incomplete, sia per il breve periodo preso in esame, sia per la scarsezza delle osservazioni.

Da esperienze condotte con maggiore larghezza, tenendo per guida i risultati teorici e sperimentali già raggiunti, si potranno ricavare risultati veramente definitivi e tali da ripagare largamente la pazienza ed il lavoro necessari.

Io mi auguro che non mancherà nel nostro Paese il Tecnico valoroso e tenace e l'Amministrazione lungimirante, che vorranno unire i loro sforzi per portare una parola decisiva su questo argomento, tanto più che da noi non sono poche le opere importanti e di notevole ardimento, che ottimamente si presterebbero ad indagini del genere.

CONCLUSIONI

Col presente lavoro ho tentato di apportare, nello studio delle dighe ad arco, un contributo sopra due punti notevoli; e precisamente: sulla possibilità di indicare un metodo di calcolo diretto e semplice, col quale le dimensioni di una diga si determinino in base alla condizione della massima economia, e sulla importanza che assumono gli sforzi interni prodotti da variazioni di temperatura.

Dopo aver passato in rassegna, nel Cap. I, i metodi più recenti per il calcolo delle dighe ad arco, ho, con procedimenti sufficientemente approssimati per i bisogni della pratica, ricavato le form. (5) e (6) del Cap. II, le quali permettono il calcolo diretto di un elemento di volta, soggetto ad una pressione idrostatica uniforme.

Dall'analisi di queste formule semplicissime ho desunto, fra l'altro, dei risultati interessanti sull'influenza della deformabilità della volta nella determinazione degli sforzi interni (pag. 56), ed ho ricavato una costruzione molto agevole del profilo trasversale teorico, in una diga ad arco con corda costante (pag. 58 e Fig. 6 e 7). Per le dighe a corda variabile non è possibile dare una costruzione egualmente semplice, ma il calcolo di esse può essere fatto rapidamente (pag. 82 e seg.), con l' aiuto delle formule (5) e (6) del Cap. II e meglio ancora con le Tabelle IV e VII, e specialmente con la Tabella VIII, appositamente calcolate.

Lo studio avrebbe dovuto essere completato con l'esame delle volte a generatrici inclinate, tenendo conto della disuniformità della pressione idrostatica e della componente del

peso proprio. Per quest'ultima (Cap. I pag. 30 e seg.) ho ricavato le form. (19), (21), (22), e calcolato la Tab. III, mediante cui si esegue facilmente un calcolo di verifica. Ho anche iniziato la ricerca delle formule per il calcolo diretto, analoghe a quelle ricavate per dighe a generatrici verticali, e mi riservo di darne notizia in una prossima pubblicazione.

Le citate form. (5) e (6) permettono lo studio esauriente della condizione di massima economia per un anello di volta, ed i risultati a cui sono giunto, sintetizzati nella form. (11) del Cap. II, nella Tab. VI, e nella fig. 8, sono di un certo interesse, specialmente perchè mostrano la inesattezza delle norme finora adottate.

La ampiezza di massima economia risulta infatti variabile col carico di sicurezza del materiale e con la pressione idrostatica unitaria; e precisamente l'ampiezza deve essere tanto più grande, quanto minore è il rapporto di quelle due quantità.

Ho affrontato poi il problema della massima economia non per un singolo anello, ma per l'insieme della costruzione.

Per dighe a generatrici verticali e corda costante, ho potuto stabilire le form. (17) e (18) del Cap. II, ed i conseguenti diagrammi riportati con linee tratteggiata e punteggiata nella fig. 8. Queste formule, relative ai due casi di sezione trasversale simmetrica e di sezione con paramento a monte verticale, sono perfettamente analoghe a quella trovata per un singolo anello.

Molto più complesso è il problema di minima spesa per una diga a corda variabile, specie se è ignota la legge analitica di tale variazione. Ho studiato però un procedimento grafico generale (pag. 90 e seg., e Tav. A ed A^{bis} annesse), di cui non mi dissimulo gli inconvenienti, (specie per la configurazione intricata delle curve delle Tav. A ed A^{bis}), ma che in ogni modo risolve con sufficiente esattezza il quesito.

Il Cap. III è dedicato allo studio degli effetti dovuti a variazioni termiche e consta essenzialmente di tre parti. Nella prima (pag. 97 a 106) ho cercato di dare delle formule approssimate (form. (2), (4) e (7) e Tab. IX e X) che permettano di

estendere l'uso delle form. (5) e (6) del Cap. II, in modo da potere eseguire il calcolo diretto di un elemento di volta, tenendo conto anche degli sforzi termici. Nella seconda (pagina 106 a 115) mi pongo il problema della ricerca degli sforzi termici dovuti ad una distribuzione interna delle temperature, caratterizzata da una legge qualsiasi lungo una normale ai paramenti, ma avente sempre come isotermiche delle superficie parallele ai paramenti stessi. Partendo da ipotesi arbitrarie, ma intuitivamente accettabili, pervengo alle form. (16) e (16'), che non sono se non una estensione di quelle date dal Guidi per un caso particolare.

Preparato così il meccanismo adatto a tener conto di una distribuzione delle temperature, con legge comunque variabile nello spessore della diga, ho affrontato lo studio di tali distribuzioni (pag. 115 a 138), nei due casi limiti del serbatoio sempre pieno e del serbatoio sempre vuoto, e nella ipotesi che le temperature esterne oscillino con legge sinusoidale. Sono pervenuto così alle form. (25) e (30), che permettono di tracciare i diagrammi della distribuzione delle temperature, nei diversi casi. Le Tab. XII e XIII, appositamente calcolate, e le Fig. 13 e 15, agevolano i calcoli numerici.

Tenendo conto delle costanti fisiche che competono ai materiali da costruzione, ed in particolare al calcestruzzo di cemento, e schematizzando le oscillazioni della temperatura atmosferica nella risultante di due oscillazioni sinusoidali, una con periodo diurno ed una con periodo annuo, ho potuto dedurre alcune conseguenze non prive di interesse.

È principalmente notevole il risultato che la oscillazione diurna non investe se non uno strato superficialissimo della costruzione, e può quindi, senza grande errore, trascurarsi, bastando considerare la sola oscillazione annua della temperatura media giornaliera.

Esperienze eseguite negli ultimi anni, specialmente in America, mi sembra che concordino, abbastanza esattamente, (pag. 145 a 152), con i risultati teorici desunti, ma ritengo che ulteriori ricerche sperimentali, su opere costruite o in costruzione, sarebbero certo utilissime per più ampiamente illuminare questo problema.

Non ho mancato di far cenno (pag. 138 a 145) di altri fenomeni di cui solo da poco si è messo in chiaro l'importanza, e cioè della contrazione del calcestruzzo e dello sviluppo di calore, che si verificano durante la presa. Quest'ultimo specialmente è un elemento rilevante nel calcolo degli sforzi termici, e su di esso molto studio resta ancora da fare. Ho tentato in proposito una impostazione analitica del problema, da cui risulta la necessità di determinare non, come sinora si è fatto, l'aumento di temperatura, ma piuttosto la quantità di calore che si sviluppa durante la presa, per ogni unità di volume. In questo senso ho iniziato appunto delle misure calorimetriche.

Non ho la pretesa di aver potuto dire, su problemi così complessi, una parola decisiva; mi riterrò tuttavia largamente compensato della mia fatica, se questo studio saprà dare lo spunto a più esaurienti ricerche sperimentali, per mezzo delle quali si possa, da me stesso o da altri più competente, completare l'analisi che con questo scritto ho iniziato.

Napoli, ottobre 1922.

LIBRARY
OF THE
UNIVERSITY OF ILLINOIS

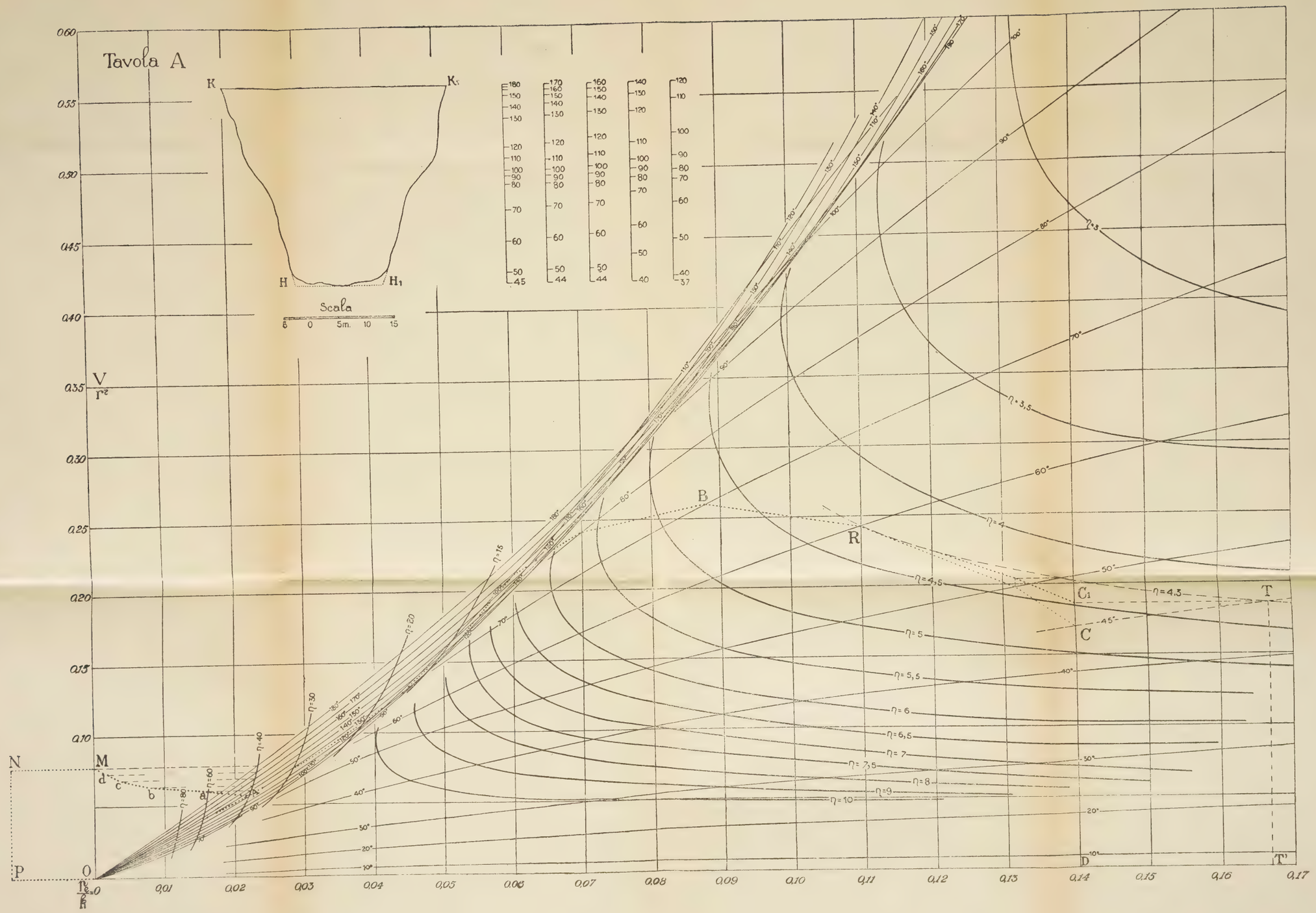


Tavola A
K
K₁
H
H₁
Scala
δ 0 5m. 10 15
V/r²
0,60
0,55
0,50
0,45
0,40
0,35
0,30
0,25
0,20
0,15
0,10
0
N
M
P
d
c
b
a
A
B
R
C
C₁
T
T'
D
η=3
η=3,5
η=4
η=4,5
η=4,3
η=5
η=5,5
η=6
η=6,5
η=7
η=7,5
η=8
η=9
η=10
η=15
η=20
η=30
η=40
η=60
η=80
0,01
0,02
0,03
0,04
0,05
0,06
0,07
0,08
0,09
0,10
0,11
0,12
0,13
0,14
0,15
0,16
0,17

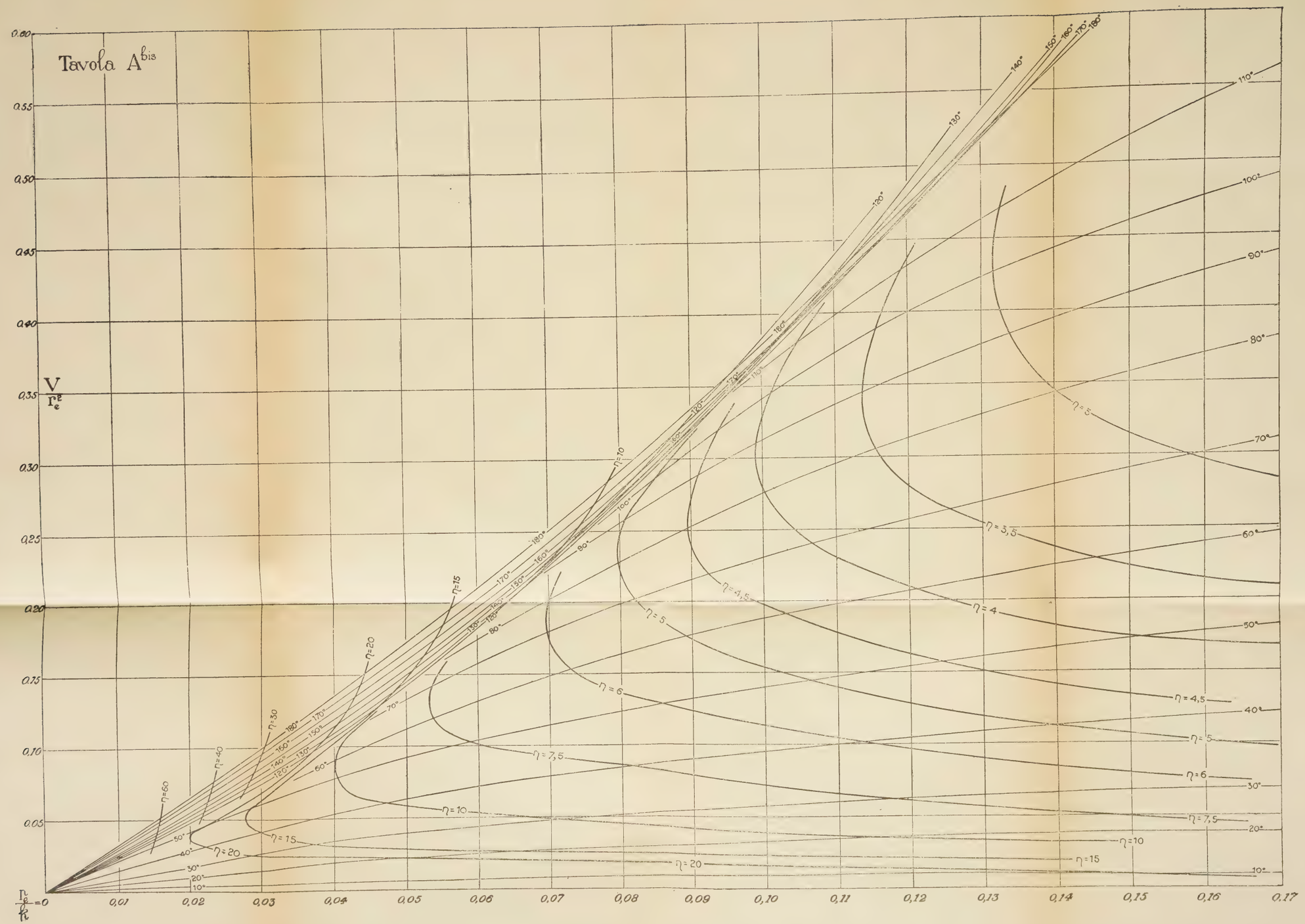


Tavola A^bis
V / r_e^2
r_e / h = 0
0,01
0,02
0,03
0,04
0,05
0,06
0,07
0,08
0,09
0,10
0,11
0,12
0,13
0,14
0,15
0,16
0,17
0,60
0,55
0,50
0,45
0,40
0,35
0,30
0,25
0,20
0,15
0,10
0,05
η=60
η=40
η=30
η=20
η=15
η=10
η=7,5
η=6
η=5
η=4,5
η=4
η=3,5
η=5
η=6
η=7,5
η=10
η=15
η=20
10°
20°
30°
40°
50°
60°
70°
80°
90°
100°
110°
120°
130°
140°
150°
160°
170°
180°

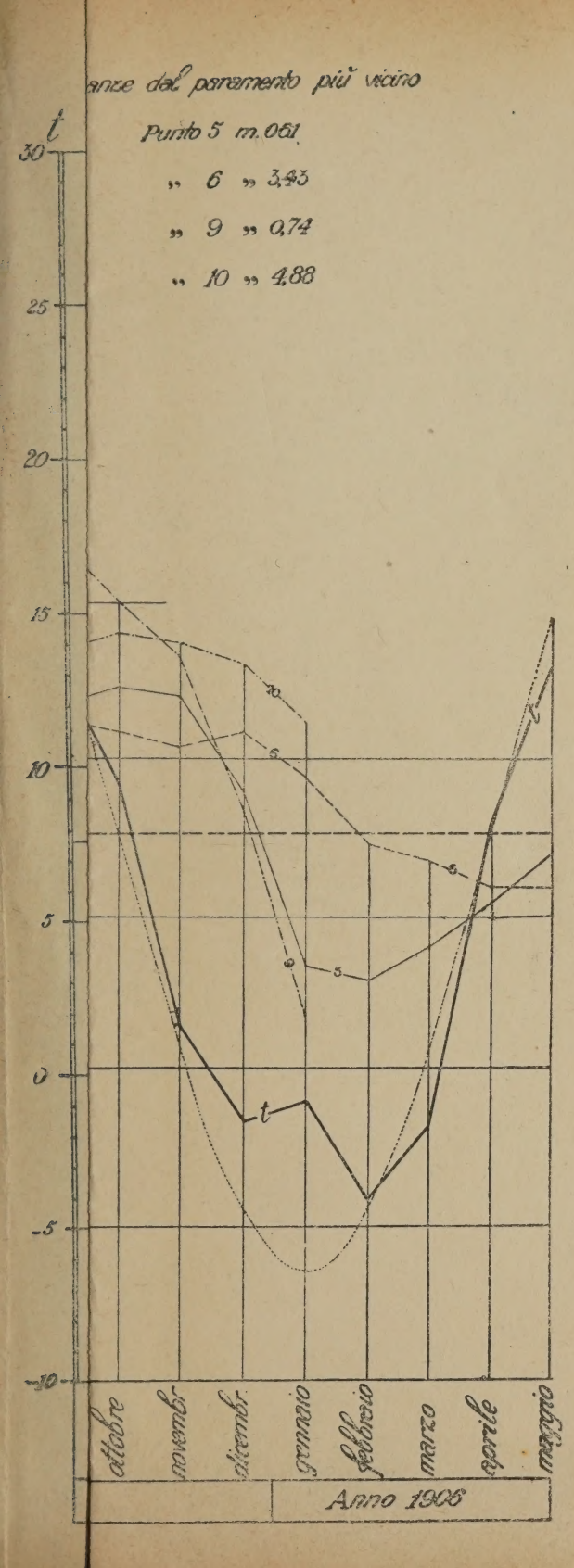
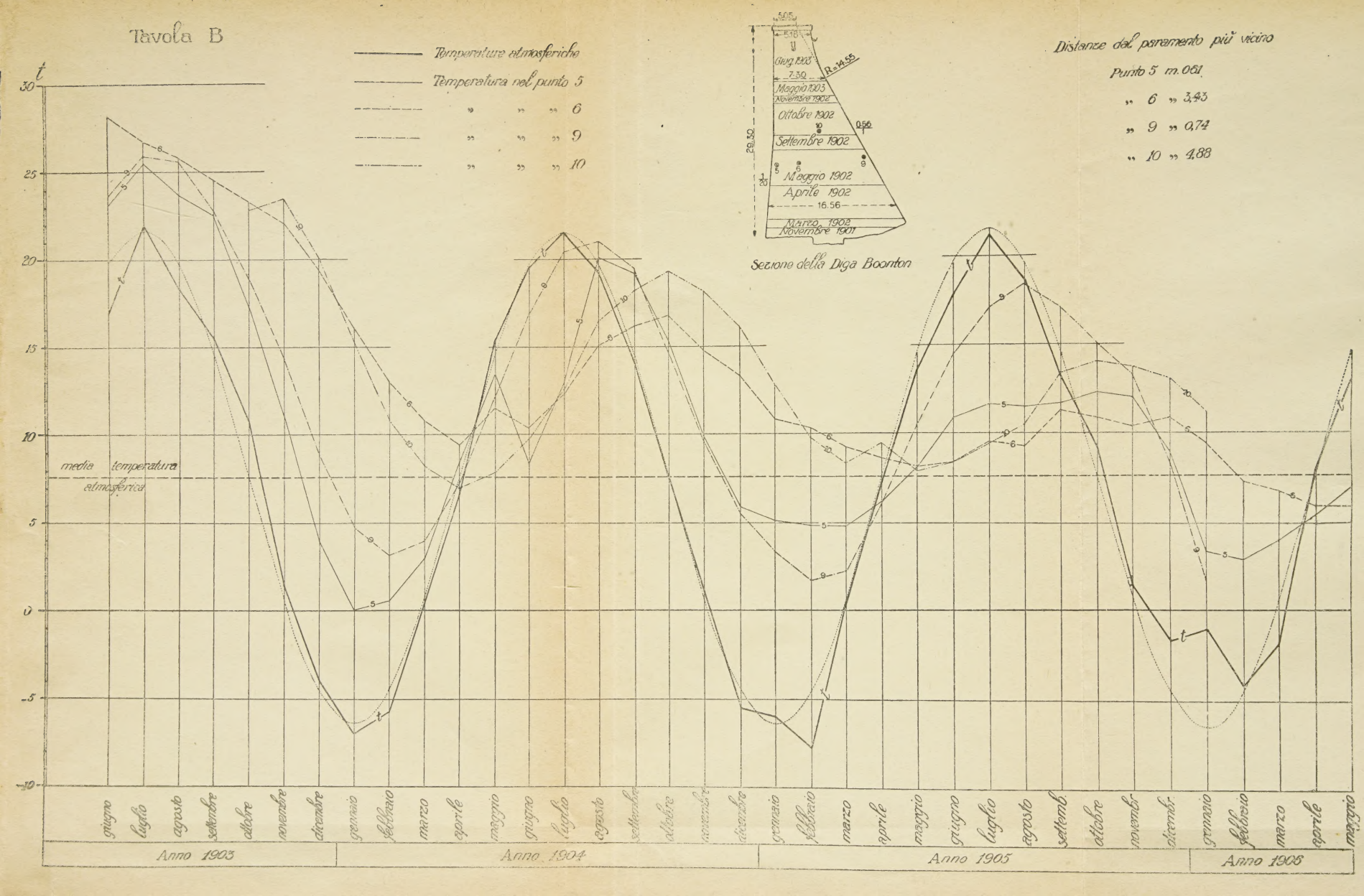

anze dal paramento più vicino
Punto 5 m. 0,61
" 6 " 3,43
" 9 " 0,74
" 10 " 4,88
t
30
25
20
15
10
5
0
-5
-10
10
6
9
5
t
ottobre
novembre
dicembre
gennaio
febbraio
marzo
aprile
maggio
Anno 1906

Tavola B


Temperature atmosferiche
Temperatura nel punto 5
" " " 6
" " " 9
" " " 10
t
30
25
20
15
10
5
0
-5
-10
media temperatura atmosferica
Distanze dal paramento più vicino
Punto 5 m. 0.61
" 6 " 3.45
" 9 " 0.74
" 10 " 4.88
5.05
5.18
Giug. 1903
7.30
R=14.55
Maggio 1903
Novembre 1902
Ottobre 1902
0.56
Settembre 1902
29.30
Maggio 1902
Aprile 1902
16.56
Marzo 1902
Novembre 1901
Sezione della Diga Boonton
giugno
luglio
agosto
settembre
ottobre
novembre
dicembre
gennaio
febbraio
marzo
aprile
maggio
giugno
luglio
agosto
settembre
ottobre
novembre
dicembre
gennaio
febbraio
marzo
aprile
maggio
giugno
luglio
agosto
settemb
ottobre
novembr
dicembr
gennaio
febbraio
marzo
aprile
maggio
Anno 1903
Anno 1904
Anno 1905
Anno 1906